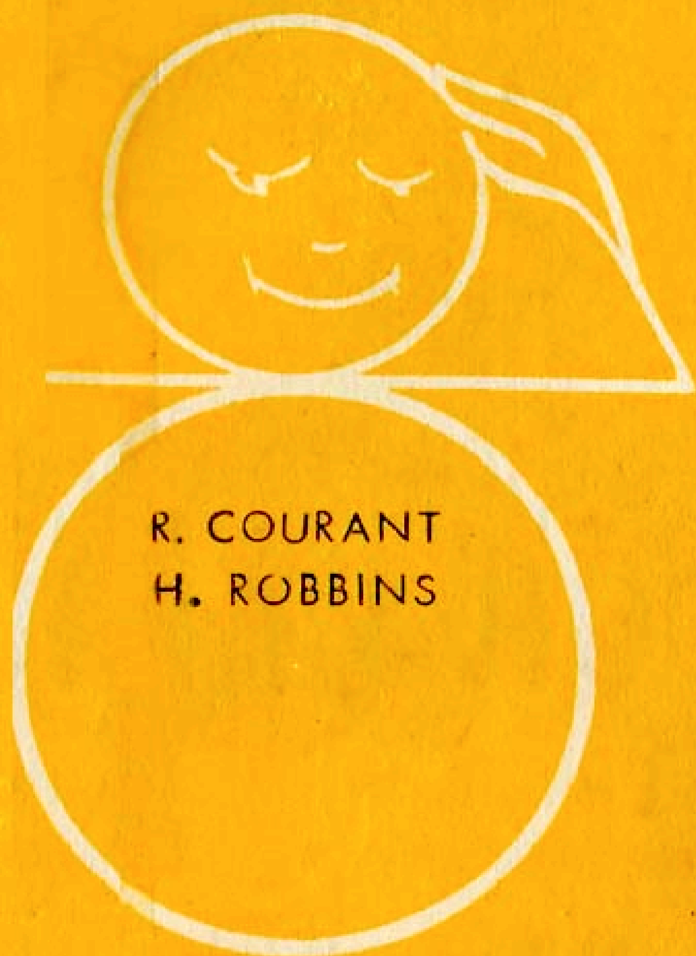


R. COURANT
H. ROBBINS

TOÁN HỌC là gì?

TẬP III



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



THÂN TẶNG BẠN NGUYỄN THANH HIỆP

Chúc mừng Bạn là người đầu tiên
thích trang của chúng tôi

Quân

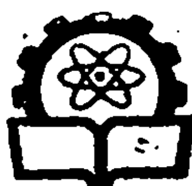
R. COURANT , H. ROBBINS.

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

Phác thảo sơ cấp về tư tưởng và phương pháp

Người dịch: Hàn Liên Hải

TẬP 3



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI — 1985

Nguyên bản tiếng Anh
Dịch qua bản tiếng Nga :

Р.КУРАНТ, Г.РОББИНС

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА ?

Элементарный очерк идей и методов

Издатеьлство «Просвещенне», Москва--1967

CHƯƠNG VII

CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

MỞ ĐẦU

Một đoạn của đường thẳng xác định con đường ngắn nhất giữa hai điểm mút của nó. Cung của đường tròn lớn chính là đường cong ngắn nhất nối hai điểm trên mặt cầu. Trong tất cả các đường cong phẳng, kín có cùng một độ dài thì đường tròn sẽ giới hạn một diện tích lớn nhất. Trong các mặt cong kín có cùng một diện tích thì mặt cầu giới hạn một thể tích lớn nhất. Các nhà toán học Hylạp đã biết những tính chất cực đại và cực tiểu tương tự. Một trong những phát minh tuyệt diệu nhất về vấn đề đó đã được ghi tên *Hêrôn*, nhà bác học Alêxăndri của thế kỷ I. Từ lâu người ta đã biết rằng, một tia sáng xuất phát từ điểm P đến gặp một gương phẳng L tại điểm R, sẽ bị phản xạ lại theo một hướng RQ nào đó sao cho PR và QR tạo với gương những góc bằng nhau. Theo truyền thuyết, Hêrôn đã xác nhận rằng, nếu R' là một điểm tùy ý của gương khác với R, thì tổng các đoạn PR' + R'Q lớn hơn PR + RQ. Định lý này (ta sẽ chứng minh ngay sau đây) khẳng định con đường thật của tia sáng PRQ giữa P

và Q là con đường ngắn nhất từ P đến Q có dập vào gương L, đã là một phát minh có thể xem như mầm mống của lý thuyết quang hình.

Không lấy gì làm lạ rằng các nhà toán học đã chú ý rất nhiệt tình đến các vấn đề tương tự. Trong cuộc sống hàng ngày luôn luôn nảy ra bài toán lớn nhất và nhỏ nhất, tốt nhất và xấu nhất. Nhiều bài toán có ý nghĩa thực tiễn được đặt ra dưới hình thức như vậy. Chẳng hạn, hình dạng của đáy tàu phải thế nào để nó chịu sức cản nhỏ nhất khi chuyển động dưới nước? Hệ thức giữa các kích thước của một bình chứa hình trụ như thế nào để có thể tích lớn nhất với chi phí vật liệu cho trước?

Lý thuyết tổng quát về cực trị, — tức là lý thuyết cực đại và cực tiểu — phát sinh từ thế kỷ XVII đã nêu ra một loạt rất phong phú các nguyên lý của khoa học phục vụ cho các mục tiêu khái quát hóa và hệ thống hóa. Những bước đầu tiên do Fecma thực hiện trong phạm vi phép tính vi phân đã thúc đẩy nhanh sự cố gắng tìm ra những phương pháp chung để nghiên cứu các vấn đề về cực đại và cực tiểu. Những phương pháp này đã được bổ sung thêm rất nhiều trong thế kỷ tiếp sau cùng với sự sáng tạo ra phép tính biến phân.

Ngày càng trở nên rõ ràng là, các định luật vật lý của tự nhiên được diễn đạt khá tốt bằng các thuật ngữ của nguyên lý tối thiểu, đảm bảo một cách xử lý tự nhiên đối với lời giải tương đối đầy đủ của các bài toán riêng. Một trong những thành tựu đặc biệt nhất của toán học hiện đại là lý thuyết các giá trị dừng, dẫn đến một kiểu mở rộng khái niệm cực đại và cực tiểu, đồng thời dựa trên cơ sở của giải tích và tôpô.

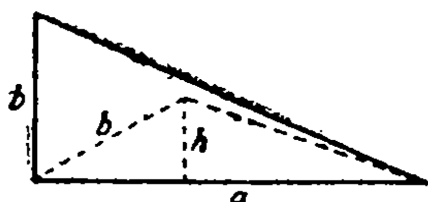
Ta hãy xét toàn bộ vấn đề với quan điểm hoàn toàn sơ cấp.

§ 1. CÁC BÀI TOÁN TRONG PHẠM VI HÌNH HỌC SƠ CẤP

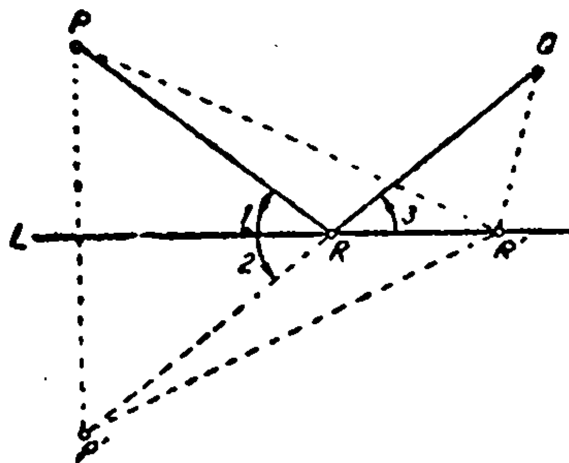
1. Tam giác có hai cạnh cho trước, có diện tích lớn nhất. Cho hai đoạn a và b. Phải tìm một tam giác diện tích lớn nhất có thể được, có hai cạnh a và b. Lời đáp là một *tam giác vuông* có các cạnh góc vuông a và b. Thực vậy, ta xét một tam giác bất kỳ có cạnh a và b (H. 176). Nếu h là chiều cao và cạnh đáy tương ứng là a thì diện tích A của tam giác bằng $\frac{1}{2}$ah. Biểu thức này, tất nhiên sẽ nhận giá trị lớn nhất khi giá trị h lớn nhất, điều này xảy ra khi h = b, tức là, khi tam giác là vuông. Vậy diện tích cực đại là $\frac{1}{2}$ab.

2. Định lý Hêrôn. Tính chất cực trị của các tia sáng. Cho một đường thẳng L và hai điểm P và Q ở một phía của nó. Phải chọn điểm R trên đường thẳng L như thế nào để cho tổng các đoạn PR + RQ là con đường ngắn nhất từ P đến Q có ghé qua L? Đó là bài toán của Hêrôn về tia sáng. Nếu người nào muốn đi bằng con đường ngắn nhất từ P đến Q có ghé qua L thì cũng phải giải bài toán như vậy (hãy tưởng tượng L là bờ sông mà ta phải lấy nước ở đấy). Muốn giải được bài toán, ta vẽ điểm P' đối xứng với điểm P qua đường thẳng L. Đường thẳng P'Q cắt L tại điểm R phải tìm. Dễ chứng minh rằng PR + PQ nhỏ hơn PR' + R'Q, trong đó R' là một điểm bất kỳ ở trên L khác với điểm R. Thực vậy: PR = P'R và PR' = P'R', tức là PR + RQ = = P'R + RQ = P'Q và PR' + R'Q = P'R' + R'Q. Nhưng P'R' + R'Q lớn hơn P'Q (vì tổng hai cạnh của tam giác lớn hơn cạnh thứ ba), tức là PQ' + R'Q lớn hơn PR + RQ và điều đòi hỏi đã được chứng minh. Ta giả

thiết là P và Q không nằm trên đường thẳng L. Trên H. 177 ta thấy $\widehat{3} = \widehat{2}$ và $\widehat{2} = \widehat{1}$, tức là $\widehat{1} = \widehat{3}$. Nói cách khác, R là một điểm sao cho PR và RQ tạo với L những góc bằng nhau. Suy ra rằng một tia sáng sau khi phản xạ từ L đã thực hiện một đường đi tối thiểu từ P đến Q (thực nghiệm đã chứng tỏ khi phản xạ, góc tới bằng góc phản xạ) — phù hợp với khẳng định vừa nêu ở trên.

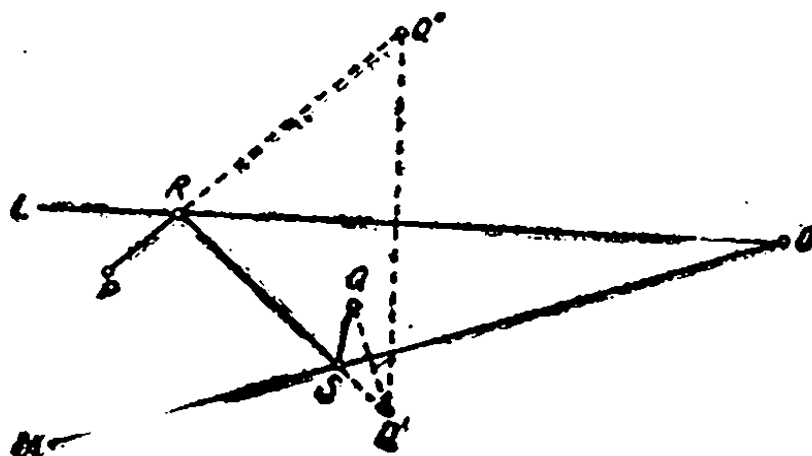


H.176. Cực đại của diện tích tam giác có hai cạnh cho trước



H. 177. Định lý Hêrôn

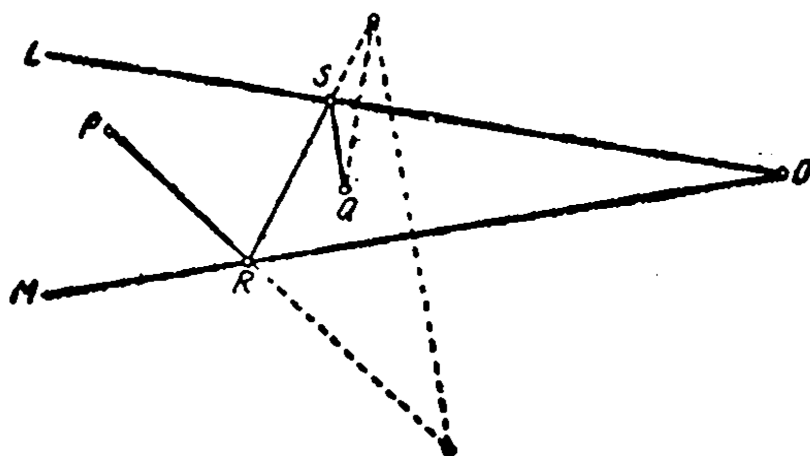
Có thể mở rộng bài toán nếu đưa vào một số đường thẳng L, M ... Chẳng hạn, ta xét trường hợp hai đường thẳng L, M và hai điểm P, Q có vị trí như trên H. 178 và tìm con đường ngắn nhất từ điểm P đến Q đập vào L, sau đó đập vào M.



H. 178. Phản xạ qua hai gương

Giả thử Q' là ảnh của Q qua M và Q" là ảnh của Q' qua L. Ta vẽ đường thẳng PQ" cắt L ở điểm R, và vẽ đường thẳng PQ' cắt M ở điểm S: khi đó PR + RS + SQ là con đường ngắn nhất phải tìm. Việc chứng minh là tương tự như trên, đề nghị bạn đọc tự thực hiện để luyện tập. Nếu L và M là những tấm gương thì một tia sáng đi từ P phản xạ qua L ở điểm R, qua M ở điểm S rồi đi tới Q; tia sáng đó đã chọn con đường có độ dài ngắn nhất.

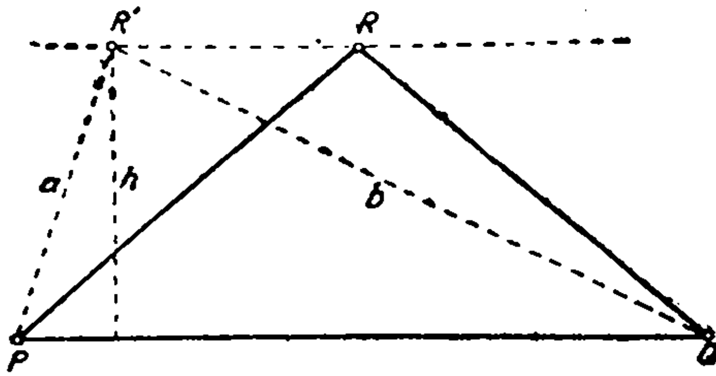
Cũng có thể nêu ra bài toán tìm con đường ngắn nhất từ P đến Q có ghé qua M, sau đó qua L. Con đường phải đi sẽ là PRSQ (H. 179) tương tự như con đường PRSQ đã xét ở trên. Độ dài con đường mới có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng con đường trên.



H. 179. Một dạng của bài toán trên.

3. Áp dụng vào các bài toán về tam giác Nhờ định lý Hêrôn có thể giải hai bài toán sau đây dễ dàng:

a) Cho trước diện tích A và một cạnh c = PQ của tam giác. Trong số những tam giác như vậy, tìm một tam giác có tổng hai cạnh kia a và b nhỏ nhất. Đáng lẽ cho trước cạnh c và diện tích A của tam giác, có thể cho trước cạnh c và chiều cao h thuộc c, bởi vì A = 1/2 hc. Bởi thế, bài toán qui về tìm điểm R (H.180)

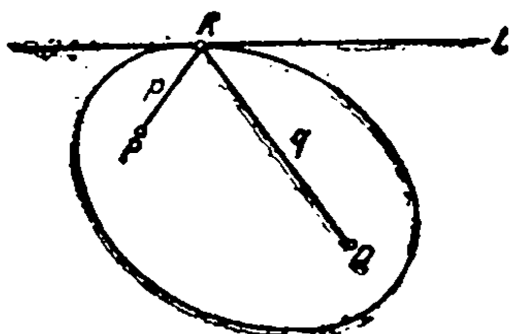


H.180. Tam giác có chu vi nhỏ nhất với đáy và diện tích cho trước

cách đường thẳng PQ một khoảng h mà tổng các cạnh a + b là cực tiểu. Từ giả thiết đầu tiên suy ra điểm R phải nằm trên đường thẳng song song với đường thẳng PQ và cách nó một khoảng h. Nếu vậy thì rõ ràng bài toán sẽ được giải nhờ định lý Hêrôn áp dụng cho trường hợp P và Q cách đều đường thẳng L: tam giác PRQ phải tìm là tam giác cân.

b) Cho trước một cạnh c và tổng a + b của hai cạnh kia, tìm tam giác có diện tích lớn nhất. Bài toán này ngược với bài toán a) — Lời giải vẫn là tam giác cân a = b. Như đã biết, đối với một tam giác như thế thì với diện tích cho trước, tổng a + b sẽ có giá trị nhỏ nhất. Điều đó có nghĩa là đối với mọi tam giác khác có đáy c và có cùng diện tích thì tổng a + b sẽ có giá trị lớn hơn. Mặt khác, từ a) thấy rõ rằng trong mọi tam giác có đáy c và có diện tích lớn hơn diện tích của tam giác cân đã xét thì a + b cũng sẽ lớn hơn. Suy ra mọi tam giác khác có a + b và c cho trước phải có diện tích nhỏ, tức là với c và a + b cho trước thì chính tam giác cân là tam giác có diện tích lớn nhất.

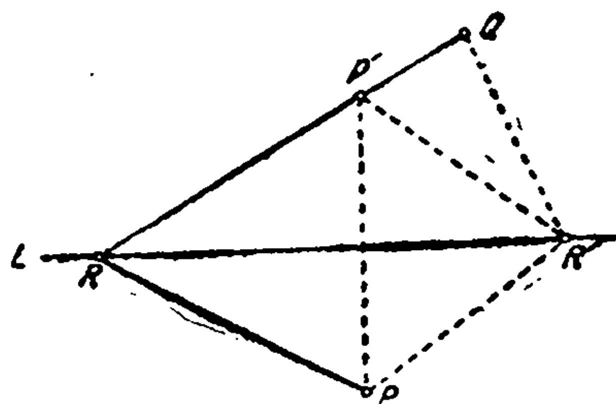
4. Tính chất của tiếp tuyến với elip và hypebol. Các tính chất cực trị tương ứng. Một số bài toán hình học quan trọng có liên hệ với định lý Hêrôn. Ta đã chứng minh rằng nếu R là một điểm trên đường thẳng L sao cho PR + RQ trở nên cực tiểu thì các đường



H.181. Tính chất của tiếp tuyến với elip

thẳng RP và RQ tạo thành với L các góc bằng nhau. Ký hiệu giá trị nhỏ nhất của PR + RQ là 2a. Hơn nữa, giả thử p và q là khoảng cách từ một điểm tùy ý của mặt phẳng theo thứ tự tới các điểm P và Q, ta xét quĩ tích các điểm của mặt phẳng mà p + q = 2a. Quĩ tích này là một elip với các tiêu điểm P và Q, đi qua một điểm R trên đường thẳng L, trong đó *L là đường tiếp xúc với elip đó ở điểm R*. Thực vậy, nếu đường thẳng L còn cắt elip ở một điểm nào đó khác R thì, có một đoạn của đường thẳng L nằm ở trong elip, đối với mỗi điểm của đoạn này thì p + q nhỏ hơn 2a. Thực thế, dễ dàng chứng tỏ rằng p + q nhỏ hơn hoặc lớn hơn 2a tùy theo điểm nằm bên trong hoặc bên ngoài elip. Nhưng, vì ta biết, đối với các điểm trên đường thẳng L tất phải có $p + q \geqslant 2a$, cho nên giả thiết đã nêu phải bỏ đi. Vậy đường thẳng L tiếp xúc với elip tại R. Ngoài ra, biết PR và PQ tạo với L những góc bằng nhau, ta còn suy ra được một định lý quan trọng xem như là kết quả gián tiếp của lập luận của chúng ta: tiếp tuyến với elip tạo những góc bằng nhau với các đường thẳng nối tiếp điểm với hai tiêu điểm.

Bài toán sau đây là gần gũi với bài toán trước. Cho một đường thẳng L và hai điểm P và Q ở hai phía của L (H. 182), cần tìm một điểm R trên L sao

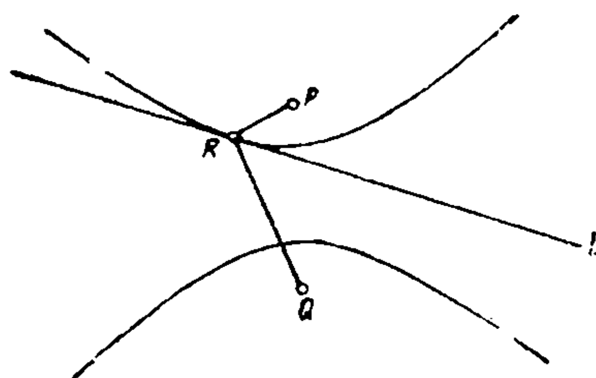


H.182. | PR − QR | lớn nhất

cho $/p - q/$, tức là giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ R đến P và Q *lớn nhất* (giả thiết L không phải là đường vuông góc vạch từ trung điểm của đoạn PQ; nếu không thế thì $p - q$ bằng 0 với mọi điểm của L và bài toán sẽ mất ý nghĩa). Để giải bài toán, ta vẽ điểm đối xứng của P đối với L; điểm P' thu được nằm ở cùng một phía của L với Q. Dù R' là điểm ở đâu trên L, ta cũng có: $p = R'P = R'P'$; $q = R'Q$. Vì hiệu hai cạnh của tam giác không vượt quá cạnh thứ ba cho nên, khi xét tam giác R'QP', có thể nhận thấy đại lượng $/p - q/ = /R'P' - R'Q/$ nhỏ hơn hoặc bằng P'Q; trên hình vẽ, ta thấy $/p - q/$ chỉ bằng P'Q khi R', P' và Q thẳng hàng. Bởi vậy, điểm R phải tìm là giao điểm của đường thẳng L với đường thẳng đi qua P' và Q. Cũng như trong bài toán trước, dựa vào sự bằng nhau của các tam giác RPR' và RP'R' dễ dàng chứng minh được các góc tạo bởi đường thẳng L với các đoạn RP và RQ là bằng nhau.

Cũng như bài toán trước, từ đó suy ra rất dễ dàng tính chất tiếp tuyến của hypebol. Thừa nhận giá trị lớn nhất của hiệu $/PR - RQ/$ bằng 2a, ta xét quĩ tích những điểm trong mặt phẳng sao cho giá trị tuyệt đối của $p - q$ bằng 2a. Đó là một hypebol với các tiêu điểm P và Q, đi qua điểm R. Dễ thấy rằng giá trị tuyệt đối của $(p - q)$ nhỏ hơn 2a ở trong miền bao hàm giữa hai nhánh của hypebol, và lớn hơn 2a ở phía có tiêu điểm của mỗi nhánh tương ứng. Từ đó — về cơ bản cũng dựa vào những lý lẽ giống như trong trường hợp elip — suy ra đường thẳng L tiếp xúc với hypebol ở điểm R. Tiếp xúc với nhánh nào là tùy theo điểm nào trong hai điểm P và Q gần L hơn. Nếu điểm P gần hơn

thì đường thẳng L sẽ tiếp xúc với nhánh bao điểm P. Tương tự như thế đối với điểm Q (H. 183). Nếu P và Q cách đều đường thẳng L thì L không tiếp xúc với nhánh nào của hypebol cả mà sẽ là một trong các đường tiệm cận của nó. Có thể đoán nhận được kết quả này nếu xuất phát từ sự kiện là trong trường hợp đang xét thì phép dựng đã mô tả ở trên không cho một điểm R (hữu hạn) nào cả, bởi vì đường thẳng P'Q song song với đường thẳng L.

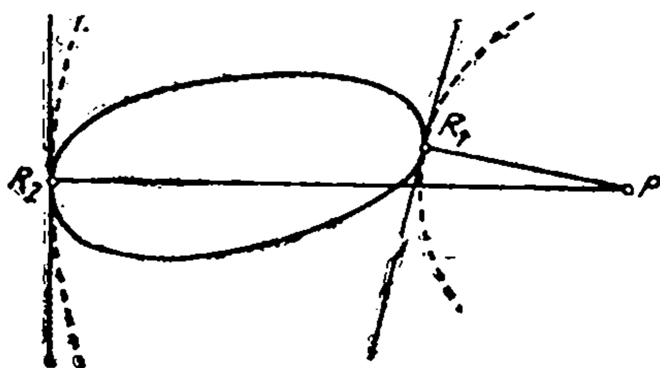


H. 183. Tính chất của tiếp tuyến với hypebol.

Cũng như trong trường hợp elip, lập luận của ta dẫn đến một định lý quen biết: tiếp tuyến tại một điểm của hypebol sẽ chia đôi góc giữa các đoạn vẽ từ các tiêu điểm đến tiếp điểm.

Có thể lấy làm lạ khi thấy nếu các điểm P và Q nằm ở một phía của đường thẳng L thì ta có bài toán về cực tiểu; trong khi đó, nếu các điểm ấy nằm ở hai phía khác nhau của L, ta lại có bài toán cực đại. Nhưng cũng dễ thấy rằng sự khác biệt ấy là hoàn toàn tự nhiên. Trong bài toán thứ nhất, khi đi ra xa vô tận theo đường thẳng L về phía này hay về phía khác thì mỗi khoảng cách p và q và tổng của chúng sẽ tăng vô hạn. Bởi thế không thể tìm giá trị lớn nhất của $p + q$ mà chỉ có khả năng là bài toán sẽ *cực tiểu*. Sự việc sẽ xảy ra hoàn toàn ngược lại trong bài toán thứ hai, khi *P* và Q nằm ở hai phía của đường thẳng L. Trong trường hợp này ta không được nhầm lẫn ba đại lượng khác nhau: hiệu $p - q$, hiệu $q - p$ và giá trị tuyệt đối $|p - q|$. Ta sẽ xác định cực đại cho đại lượng

sau cùng này. Nếu hình dung một điểm R chuyển động theo đường thẳng L có những vị trí khác nhau R_1, R_2, R_3... thì sẽ dễ hiểu sự việc. Có một vị trí R nào đó mà hiệu p — q triệt tiêu, khi đó đường thẳng L sẽ cắt đường vuông góc với PQ vẽ từ trung điểm của nó. Rõ ràng tại vị trí đó, điểm R cho cực tiểu đối với giá trị tuyệt đối của hiệu p — q. Nhưng, ở về một phía của điểm đó thì p lớn hơn q, về phía kia thì nhỏ hơn, nghĩa là, đại lượng p — q dương về một phía của điểm và âm về phía kia. Cho nên, bản thân đại lượng này không có cực đại và cực tiểu tại điểm mà ở đó/ p — q/ = 0. Mặt khác, tại điểm mà /p — q/ cực đại, chắc hẳn sẽ cho cực trị của hiệu p — q. Nếu p > q thì có cực đại cho p—q ; nếu q > p thì có cực đại cho q — p, tức là cực tiểu cho p — q. Có hay không có cực đại hoặc cực tiểu cho p — q là tùy ở vị trí của hai điểm đã cho đối với đường thẳng L. Như ta đã thấy trong trường hợp P và Q cách đều L, hoàn toàn không có lời giải của bài toán cực đại bởi vì đường thẳng P'Q (xem H.182) song song với L. Khi R ra xa vô tận theo hướng này hoặc hướng khác thì đại lượng /p — q/ sẽ dần tới một giới hạn hữu hạn. Giới hạn này không có gì khác với độ dài s của hình chiếu của đoạn PQ trên đường thẳng L (bạn đọc có thể chứng minh để luyện tập). Đại lượng /p — q/ trong trường hợp này bao giờ cũng nhỏ hơn giới hạn s và sẽ không có cực đại, bởi vì dù điểm R cho trước như thế



H.184. Các khoảng cách cực trị đến các điểm của đường cong.

nào, bao giờ cũng có thể chỉ ra một điểm khác ở xa hơn, mà tại đó /p — q/ sẽ lớn hơn song vẫn không bằng s.

*5. *Khoảng cách cực trị từ một điểm đến một đường cong cho trước.* Ta sẽ bắt đầu bằng việc xác định khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ một điểm P cho trước đến các điểm của một đường cong C cho trước. Để đơn giản, ta giả thiết rằng C là một đường cong kín đơn giản có tiếp tuyến ở khắp nơi (H. 184). Ở đây, khái niệm tiếp tuyến với đường cong được thừa nhận trên cơ sở trực giác sẽ được phân tích trong chương sau. Câu trả lời rất đơn giản: nếu tại một điểm R nào đó trên C, khoảng cách PR đạt cực đại hoặc cực tiểu, thì đường thẳng PR tất phải vuông góc với tiếp tuyến của C tại điểm R. Nói gọn hơn, đường thẳng PR vuông góc với C. Chứng minh rút ra từ tình hình sau: một đường tròn tâm P đi qua R phải tiếp xúc với đường cong C. Thực vậy; nếu R là một điểm của khoảng cách nhỏ nhất thì C phải hoàn toàn nằm ngoài hình tròn, vì thế không thể cắt nó một lần nữa tại điểm R (điều này được suy ra từ một sự kiện hiển nhiên là, khoảng cách từ 1 điểm nào đó đối với P sẽ nhỏ hơn PR nếu điểm đó ở trong hình tròn và lớn hơn PR nếu điểm đó ở ngoài hình tròn). Vậy đường tròn và đường cong tiếp xúc nhau tại R và tiếp tuyến của chúng tại điểm đó là một. Còn phải lưu ý thêm rằng đoạn PR là bán kính của đường tròn và vuông góc với tiếp tuyến của đường tròn tại điểm R, do đó nó cũng vuông góc với đường cong C tại điểm này.

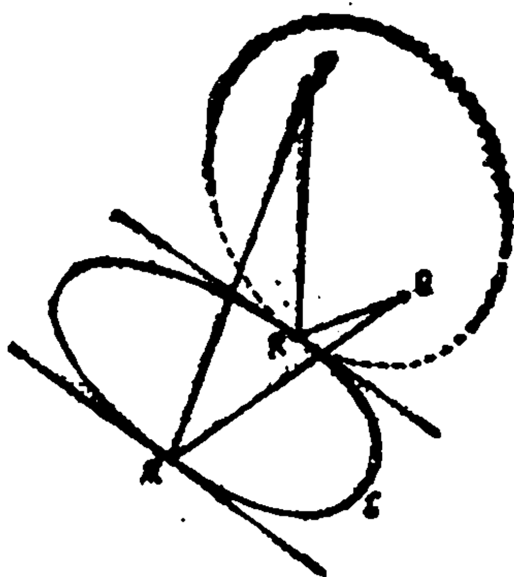
Mệnh đề sau đây có liên hệ chặt chẽ với mệnh đề trước mà chúng tôi dành cho bạn đọc tự chứng minh: đường kính của một đường cong kín C (tức là dây cung

lớn nhất của nó) phải vuông góc với C ở cả hai mút. Có thể phát biểu và chứng minh một khẳng định tương tự như vậy cho trường hợp ba chiều.

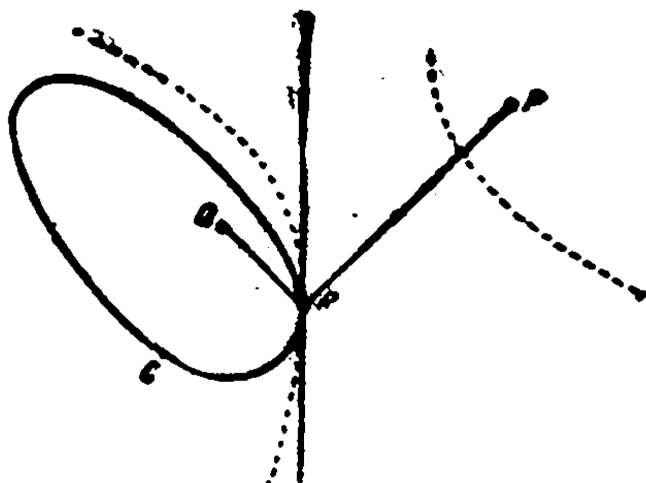
Có thể mở rộng các bài toán đề cập đến tổng và hiệu của các khoảng cách ở mục 4. Thay cho đường thẳng L, ta xét một đường cong kín đơn giản C có tiếp tuyến tại mọi điểm và hai điểm P và Q không nằm trên C. Ta sẽ tìm những điểm trên đường cong C mà tổng p+q hoặc hiệu p — q có cực trị (trong đó p và q theo thứ tự là các khoảng cách từ một điểm biến thiên trên C đến các điểm P và Q). Bây giờ ta không áp dụng được phép dựng dựa vào phép đối xứng trục đơn giản mà nhờ đó ta đã giải được hai bài toán trước (trong trường hợp C là một đường thẳng). Song ta có thể dùng các tính chất của elip và hypebol để đạt được mục đích đề ra ở đây. Vì C là một đường cong kín mà không là một đường thẳng ra xa vô tận cho nên trên nó thực sự thực hiện được cực đại và cực tiểu. Thực vậy, các đại lượng p + q và p — q sẽ đạt được cả giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên mọi đoạn hữu hạn của đường cong, do đó trên toàn bộ đường cong kín.

Dừng lại ở trường hợp tổng p + q, ta giả thiết R là một điểm trên C mà ở đó có cực đại. Giả thử 2a là giá trị của p + q tại điểm đó. Ta xét một elip (với các tiêu điểm P và Q) là quĩ tích của những điểm mà p + q = 2a. Elip này phải tiếp xúc với đường cong C tại điểm R (đề nghị bạn đọc chứng minh để luyện tập). Nhưng, các đoạn PR và QR tạo với elip những góc bằng nhau tại R.

Vì elip tiếp xúc với đường cong C tại điểm R cho nên các đoạn PR và QR cũng tạo thành những góc bằng nhau với C tại điểm này. Một lập luận hoàn toàn tương tự sẽ dẫn ta tới cùng một kết luận trong trường hợp tổng p + q đạt cực tiểu tại điểm R.



H. 185. Cực đại và cực tiểu của tổng PR + QR.



Hình 186. Cực tiểu của hiệu PR − QR.

Vậy, ta đi đến định lý: *Cho một đường cong kín C và hai điểm P và Q ở ngoài nó. Tại mỗi điểm R mà tổng p + q đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên đường cong C, các đoạn PR và QR sẽ tạo thành những góc bằng nhau với đường cong C* (tức là với tiếp tuyến của nó).

Nếu điểm P ở bên trong C, còn điểm Q ở ngoài C thì định lý còn đúng với những điểm tại đó p + q đạt giá trị lớn nhất, nhưng mất ý nghĩa đối với điểm tại đó q + p đạt giá trị nhỏ nhất, bởi vì elip suy biến thành một đoạn thẳng.

Bằng cách lập luận tương tự (dùng tính chất hypebol thay cho tính chất elip), bạn đọc có thể chứng minh định lý sau đây: *Cho một đường cong kín C và hai điểm P và Q — một điểm ở trong, một điểm ở ngoài C. Tại mỗi điểm R trên C mà hiệu p — q nhận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, các đoạn PR và QR tạo thành những góc bằng nhau với đường cong C.* Nhưng đồng thời phải lưu ý có sự khác nhau quan trọng giữa trường hợp C là đường thẳng và trường hợp C là đường cong kín; trong trường hợp thứ nhất ta phải tìm cực đại của giá

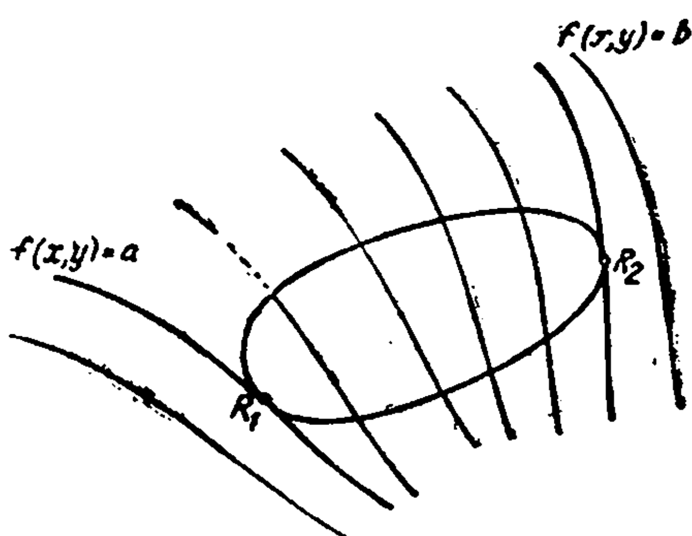
trị tuyệt đối của hiệu, tức là cực đại của $/p - q/$, nhưng trong trường hợp thứ hai bản thân hiệu $p - q$ đạt được cả giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

§2. NGUYÊN TẮC TỔNG QUÁT CỦA CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

1. Nguyên tắc Các bài toán trên là những trường hợp riêng của một bài toán tổng quát nào đó mà diễn đạt bằng giải tích thì thuận tiện hơn cả. Trở lại bài toán đầu tiên trong số các bài toán đã xét. Khi đề cập đến tổng $p + q$, ta thấy nó bao gồm vấn đề ký hiệu tọa độ điểm R là x, y; tọa độ điểm P là x_1, y_1; tọa độ điểm Q là x_2, y_2. Tiếp đến tìm cực trị của hàm:

$$f(x,y) = p + q$$

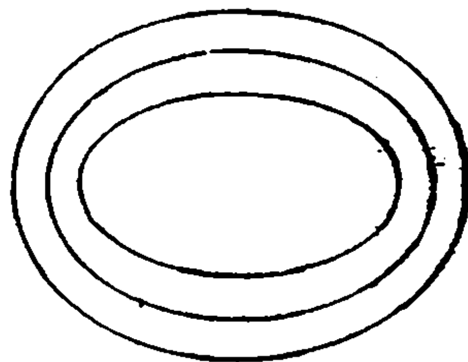
trong đó $p = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, $q = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y)^2}$. Hàm số được xét liên tục trên toàn bộ mặt phẳng nhưng, điểm R với tọa độ x, y lại nằm trên đường cong C. Ta giả thiết đường cong này được xác định bởi phương trình $g(x,y) = 0$; Chẳng hạn, bởi phương trình $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nếu C là đường tròn đơn vị.



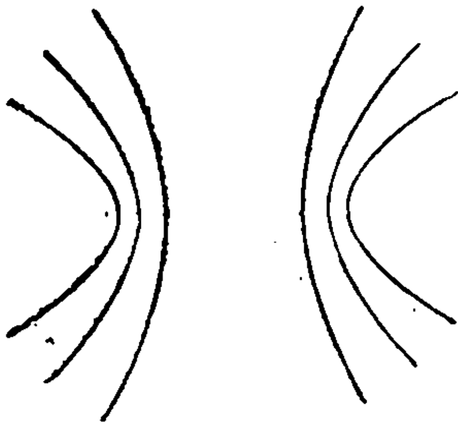
H.187. Cực trị của một hàm trên đường cong

Bây giờ ta xét đến bài toán tổng quát: tìm cực trị của một hàm cho trước $f(x,y)$ nếu các biến x và y tuân theo điều kiện $g(x,y) = 0$. Ta cố gắng xác định lời giải của bài toán này. Muốn vậy, ta xét một họ đường cong $f(x,y) = 0$. Ta hiểu «họ» đường

cong là một tập hợp tất cả các đường cong xác định bởi phương trình đã cho nhưng với những giá trị khác nhau của hằng số c (một giá trị c như vậy là không thay đổi với mọi điểm của mỗi đường cong riêng biệt). Ta giả thiết mỗi điểm của mặt phẳng, hoặc it nhất của một bộ phận của mặt phẳng có một và chỉ một đường cong của họ $f(x,y) = c$ đi qua. Như vậy, khi tăng c liên tục, đường cong $f(x, y) = c$ « quét » một bộ phận nào đó của mặt phẳng, nhưng không « quét » điểm nào hai lần (các thí dụ về những họ như thế là $x^2 - y^2 = c$, $x + y = c$, $x = c$). Đặc biệt, một đường cong của họ đang xét sẽ đi qua, một điểm R_1, tại điểm này $f(x,y)$ nhận giá trị lớn nhất trên đường cong C và một đường cong khác sẽ đi qua điểm R_2, tại đó $f(x.y)$ nhận giá trị nhỏ nhất trên C. Giả thử giá trị lớn nhất là a, giá trị nhỏ nhất là b. Về một phía của đường cong $f(x,y) = a$, giá trị $f(x,y)$ nhỏ hơn a, về phía kia thì lớn hơn a. Vì trên đường cong C ta có bất đẳng thức $f(x, y) \leqslant a$, cho nên đường cong C phải hoàn toàn nằm ở một phía của đường cong $f(x,y) = a$. Suy ra nó tiếp xúc với đường cong $f(x,y) = a$ tại điểm R_1. Cũng vậy, đường cong C tiếp xúc với đường cong $f(x,y) = b$ tại điểm R_2. Vậy, định lý tổng quát đã được chứng minh: *Nếu tại một điểm R trên đường cong C, hàm $f(x, y)$ có cực trị a thì đường cong $f(x,y) = a$ tiếp xúc với đường cong C tại R.*


H.188. Các elip đồng tiêu

2. Các thí dụ Dễ hiểu rằng các kết quả tìm được trước đây là những trường hợp riêng của định lý tổng

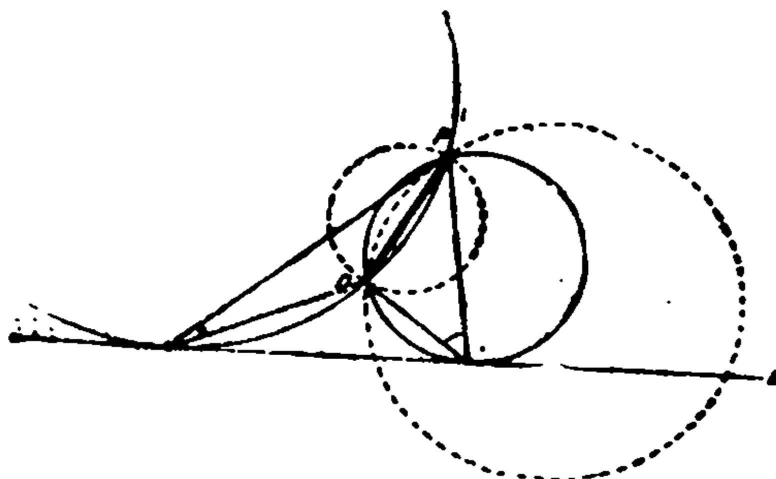


H.189. Các hypebol đồng tiêu

quát này. Nếu đề cập đến cực trị của tổng $p+q$, thì hàm $f(x,y)$ là $p+q$, còn những đường cong $f(x,y)=c$ là các elip đồng tiêu có các tiêu điểm P và Q. Theo định lý tổng quát, các elip, đi qua những điểm của đường cong C mà tại đó đạt tới một cực trị, sẽ tiếp xúc với đường cong C tại những điểm này. Nếu đề cập đến cực trị của hiệu $p-q$, thì hàm $f(x,y)$ là $p-q$. Lúc đó các đường cong $f(x,y)=c$ là những hypebol đồng tiêu có các tiêu điểm P và Q. Trong trường hợp này, các hypebol đi qua một điểm tại đó cực trị đạt tới, sẽ tiếp xúc với đường cong C. Sau đây là một thí dụ nữa về loại này. Cho trước đoạn thẳng PQ và một đường thẳng l không cắt nó, xét xem từ điểm nào của đường thẳng l thì đoạn PQ được nhìn dưới một góc lớn nhất?

Trong bài toán này, hàm cần xác định cực đại là góc θ mà ta nhìn đoạn PQ từ những điểm trên đường thẳng l. Nếu R là một điểm tùy ý có tọa độ x, y của mặt phẳng thì góc mà từ R ta nhìn đoạn PQ là hàm $\theta = f(x, y)$ của các biến x, y. Trong hình học sơ cấp ta đã biết họ đường cong $\theta = f(x, y) = \text{const}$ (hằng số) gồm các đường tròn đi qua P và Q, bởi vì một dây cung của đường tròn được nhìn với một góc như nhau từ mọi điểm của một cung tròn nằm về một phía của dây. Từ H. 190, nói chung, ta thấy có hai đường tròn thuộc họ đang xét tiếp xúc với đường thẳng l: tâm của chúng nằm ở hai phía của đoạn PQ. Một trong các tiếp điểm sẽ cho cực đại tuyệt đối của đại lượng θ. Điểm kia chỉ là cực đại « tương đối », nghĩa là giá trị của θ tại điểm

này lớn hơn các giá trị khác ở trong một lân cận nào đó của nó. Cực đại lớn hơn (cực đại tuyệt đối) được cho bởi tiếp điểm nằm trong góc nhọn tạo bởi đường thẳng l và đoạn PQ kéo dài. Cực đại nhỏ được cho bởi tiếp điểm nằm trong góc tù tạo bởi những đường thẳng đó (giao điểm của đường thẳng l với đoạn PQ kéo dài cho giá trị cực tiểu của góc θ, tức θ = 0).



H. 190. Từ điểm nào của đường thẳng l thì đoạn PQ được nhìn với góc lớn nhất?

Mở rộng bài toán đang xét, ta có thể thay đường thẳng l bằng một đường cong C tùy ý và tìm điểm R trên đường cong C nhìn một đoạn PQ không cắt C một góc lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Cũng như bài toán trước, trong bài toán này đường tròn đi qua P, Q và R phải tiếp xúc với đường cong C tại R.

§ 3. CÁC ĐIỂM DỪNG VÀ PHÉP TÍNH VI PHÂN

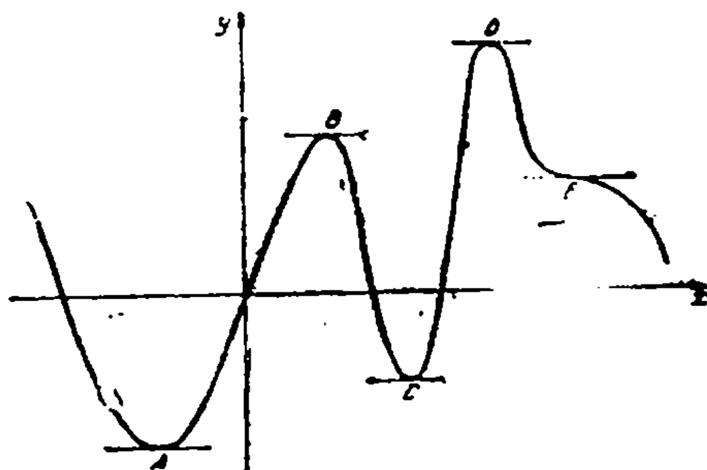
1. Các điểm dừng và cực trị. Trong những lập luận trước đây, ta hoàn toàn không dùng đến các thủ thuật của phép tính vi phân.

Thật khó mà không thừa nhận rằng những phương pháp sơ cấp của chúng ta lại vừa đơn giản hơn và trực tiếp hơn các phương pháp giải tích. Nói chung, khi

nghiên cứu một vấn đề khoa học nào đó mà xuất phát từ những đặc điểm của nó thì vẫn tốt hơn là chỉ trông chờ ở những phương pháp chung. Nguyên tắc chung sẽ giải thích được ý nghĩa của những qui trình riêng biệt đã áp dụng và tất nhiên, bao giờ nó cũng giữ vai trò chủ đạo. Đó chính là ý nghĩa của phương pháp tính vi phân trong việc nghiên cứu các bài toán cực trị. Xu hướng khái quát hóa trong toán học hiện đại chỉ là một mặt của sự việc vì những đặc thù của các bài toán đang xét và những phương pháp được áp dụng đã tạo ra cái gì là thực sự sinh động, không còn nghi ngờ trong toán học. Trong quá trình phát triển, phép tính vi phân đã chịu ảnh hưởng rất nhiều ở những bài toán riêng biệt có liên quan đến việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các đại lượng. Mối liên hệ giữa các bài toán cực trị và phép tính vi phân được giải thích như sau. Trong chương VII, ta sẽ nghiên cứu đạo hàm f'(x) của hàm f(x) và ý nghĩa hình học của nó. Nói vắn tắt, ta sẽ thấy đạo hàm f'(x) là độ dốc của tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm (x, y). Về mặt hình học thì tất nhiên tại mọi điểm cực đại hoặc cực tiểu của đường cong trơn y = f(x), tiếp tuyến với đường cong phải nằm ngang, tức là độ dốc phải bằng 0. Như vậy với các điểm cực trị ta có điều kiện f'(x) = 0.

Muốn thấy được ý nghĩa rõ ràng của sự triệt tiêu của đạo hàm f'(x) ta xét đường cong vẽ trên H.191. Ở đây, tại năm điểm A, B, C, D, E, các tiếp tuyến với đường cong nằm ngang, ta ký hiệu các giá trị tương ứng của f(x) tại năm điểm đó là a, b, c, d, e. Tại điểm D hàm f(x) đạt giá trị lớn nhất (hạn chế ở trong miền biểu thị trên hình vẽ); tại điểm A nó đạt giá trị nhỏ nhất. Tại điểm B nó có cực đại — với ý nghĩa là giá trị f(x) nhỏ hơn b tại mọi điểm trong một *lân cận* của điểm B, dù rằng tại những điểm gần D giá trị của f(x) vẫn có thể lớn hơn b. Vì

lý do đó, ta qui ước nói hàm f(x) có *cực đại tương đối* tại điểm *A*, trong khi đó tại điểm D nó có *cực đại tuyệt đối*. Cũng vậy, tại điểm C có *cực tiểu tương đối*; tại điểm *B có cực tiểu tuyệt đối*. Cuối cùng tại điểm E

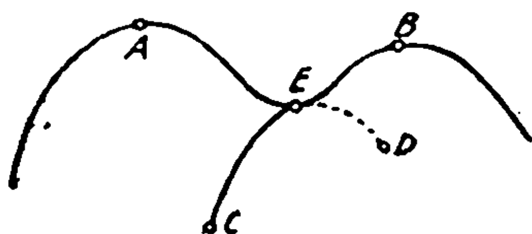


H. 191. Các điểm dừng của hàm

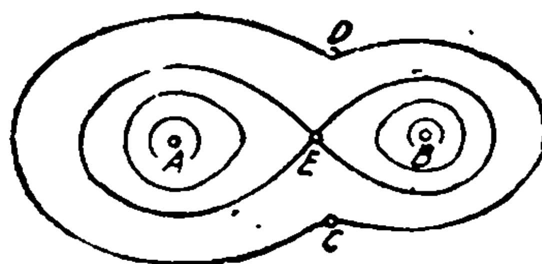
không có cực đại cũng không có cực tiểu, tuy rằng tại đó có đẳng thức $f'(x) = 0$. Vì thế, điều kiện triệt tiêu của đạo hàm $f'(x)$ là *cần* nhưng chưa *đủ* để một hàm trơn f(x) có cực trị. Nói cách khác, tại mọi điểm có cực trị (tuyệt đối và tương đối) phải có đẳng thức $f'(x) = 0$ nhưng không phải tại mọi điểm mà $f'(x) = 0$ đều phải có cực trị. Những điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ triệt tiêu, không kể tại đó có cực trị hay không, được gọi là những điểm dừng. Việc phân tích tiếp tục sẽ dẫn đến những điều kiện về đạo hàm bậc cao của hàm f(x) hoàn toàn đặc trưng cho các điểm cực đại, điểm cực tiểu và các điểm dừng khác.

2. Cực đại và cực tiểu của các hàm nhiều biến. Các điểm yên ngựa. Có những bài toán cực trị không thể biểu thị bằng khái niệm hàm f(x) một biến. Bài toán tìm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là một thí dụ đơn giản nhất thuộc loại này.

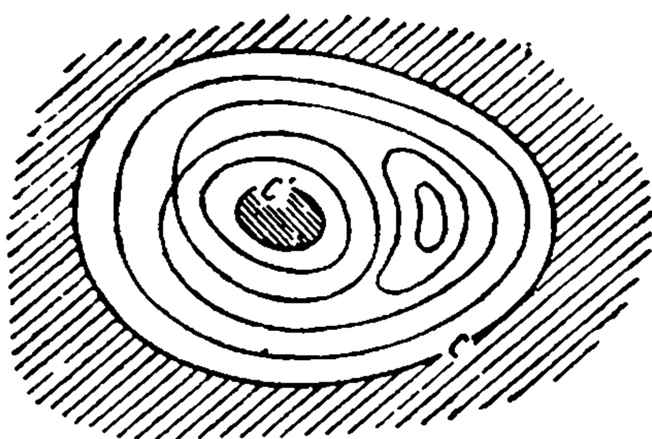
Bao giờ ta cũng có thể hình dung hàm f(x,y) là chiều cao z của một mặt so với mặt phẳng x,y và ta sẽ thể hiện bức tranh đó như một cảnh quan miền núi. Cực đại của hàm f(x, y) tương ứng với đỉnh núi, cực tiểu tương ứng với đáy hồ hoặc thung lũng. Nếu mặt là trơn thì, trong cả hai trường hợp mặt phẳng tiếp xúc với mặt tại điểm đó phải nằm ngang. Nhưng ngoài đỉnh núi và điểm thấp nhất ở đáy hồ hoặc thung lũng, có thể có những điểm khác mà tại đó mặt phẳng tiếp xúc là nằm ngang: đó là những điểm «yên ngựa» tương ứng với các đèo.



H. 192. Một cái đèo



H.193. Bản đồ tương ứng với các đường mức



H.194. Các điểm dừng trên miền nhị liên

Ta sẽ nghiên cứu chúng cẩn thận hơn. Ta giả thiết (H. 192) có hai đỉnh A và B trong dãy núi và hai điểm C và D ở trên hai sườn núi khác nhau. Giả định phải đi từ C đến D. Đầu tiên, ta xét những con đường đi từ C đến D tìm được bằng cách cắt mặt bởi những mặt phẳng đi qua C và D. Mỗi con đường như vậy đều có điểm cao nhất. Khi thay đổi vị trí của mặt

phẳng cắt thì đường đi cũng thay đổi. Có thể sẽ tìm được một con đường mà điểm *cao nhất* của nó ở vị trí *thấp nhất* trong tất cả các vị trí có thể có. Điểm E cao nhất trên con đường đó là điểm của cái đèo trong cảnh quan của ta; cũng có thể gọi nó là *điểm yên ngựa*. Rõ ràng tại E không có cực đại, cũng không có cực tiểu vì dù gần E bao nhiêu cũng có những điểm trên mặt là cao hơn E và những điểm thấp hơn E. Trong lập luận vừa rồi, không cần hạn chế ở việc xét những con đường tạo thành khi cắt mặt đó bằng những mặt phẳng mà có thể xét những con đường tùy ý nối C và D. Đặc điểm của điểm E sẽ không thay đổi.

Cũng vậy, nếu ta muốn đi từ đỉnh A đến đỉnh B thì, mọi con đường mà ta chọn sẽ có điểm thấp nhất. Nếu chỉ xét những thiết diện phẳng, ta cũng tìm được một con đường AB mà đối với nó điểm nhỏ nhất lại ở vị trí cao nhất, và ta lại thấy được điểm E trước đây. Như vậy, điểm yên ngựa E đó sẽ đạt cực tiểu cao nhất hoặc cực đại thấp nhất: ở đây ta có « Maximinimum » hoặc « Minimaximum » gọi tắt là *Minimax*. Mặt phẳng tiếp xúc (tiếp diện) tại điểm E là nằm ngang. Thực vậy, vì E là điểm thấp nhất của con đường AB, cho nên tiếp tuyến với AB tại E nằm ngang, vì E là điểm cao nhất của con đường CD, cho nên tiếp tuyến với CD tại E cũng nằm ngang. Bởi thế, mặt phẳng tiếp xúc đi qua hai tiếp tuyến đó phải nằm ngang. Vậy, ta có ba loại điểm khác nhau có tiếp diện nằm ngang: các điểm cực đại, các điểm cực tiểu và các điểm yên ngựa. Tương ứng với điều đó sẽ có ba loại giá trị dừng khác nhau của một hàm.

Một phương pháp khác để biểu diễn hình học một hàm f(x, y) là phương pháp vẽ các đường mức, chính những đường này được dùng trong khoa học bản đồ để biểu thị các độ cao trên thực địa. Đường mức là

một đường cong nào đó trong mặt phẳng x, y mà dọc theo đường cong đó giá trị của hàm f(x, y) không thay đổi, nói cách khác, các đường mức là những họ đường cong f(x, y) = c. Qua mỗi điểm thông thường của mặt phẳng có đúng một đường mức: các điểm cực đại và cực tiểu sẽ được bao quanh bởi các đường mức kín, tại những điểm yên ngựa có hai (hoặc nhiều) đường mức cắt nhau. Trên H. 193 có vẽ các đường mức tương ứng với cảnh quan được biểu thị trên H. 192.

Ở đây một tính chất đặc biệt của điểm yên ngựa E đã trở nên rất trực quan: mọi con đường nối A và B không đi qua E có một phần nằm trong miền f(x,y) < < f(E); trong khi đó con đường AEB trên H.192 lại có cực tiểu tại điểm E. Cũng vậy, ta sẽ chứng minh rằng giá trị f(x, y) tại điểm E chính là cực đại nhỏ nhất trên những con đường nối C và D.

3. **Các điểm minimax và tôpô.** Có mối liên hệ sâu sắc giữa lý thuyết các điểm dừng tổng quát và các tư tưởng tôpô. Về vấn đề này, ta chỉ có thể nêu ra ở đây một số chỉ dẫn vắn tắt và chỉ xét một thí dụ.

Ta xét một vùng núi trên hòn đảo hình vành khăn B có hai bờ C và C' (H. 194). Nếu ta ký hiệu độ cao so với mực nước biển là u = f(x, y) với giả thiết f(x, y) = 0 trên các bờ C và C' và f(x, y) > 0 ở bên trong thì trên đảo có ít nhất một cái đèo: trên H. 194 thì một cái đèo như thế nằm tại điểm hai đường mức cắt nhau. Sự đúng đắn của khẳng định vừa nêu sẽ trở nên trực quan, nếu ta cần tìm một con đường nối C và C' mà không phải leo đến độ cao không cần thiết. Mỗi con đường từ C đến C' có một điểm cao nhất, nếu ta chọn con đường có điểm cao thấp nhất thì điểm cao nhất này sẽ là điểm yên ngựa của hàm u = f(x, y) (cần loại trừ trường hợp tầm thường, khi một mặt phẳng nằm ngang nào đó tiếp xúc với triền núi hình vành khuyên

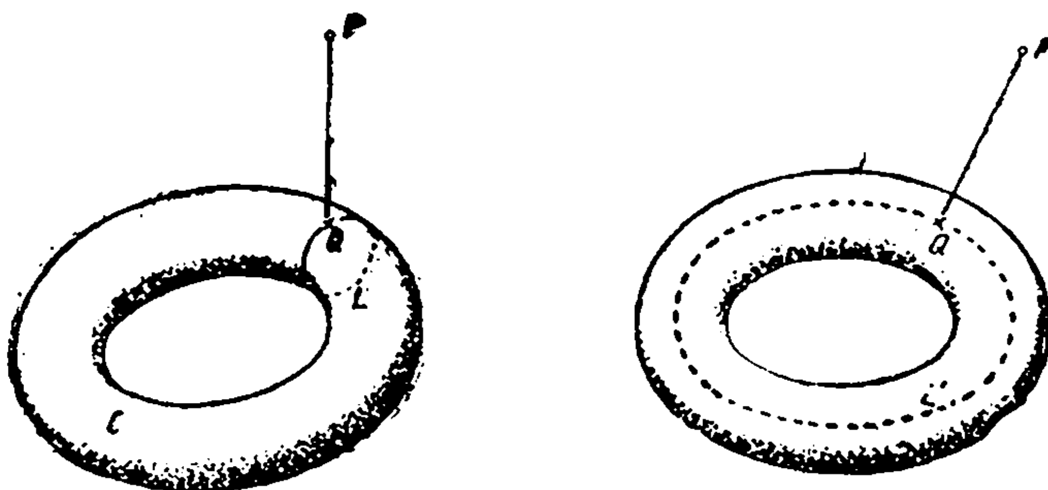
theo một đường cong kín). Nếu miền giới hạn bởi p đường cong kín thì, nói chung phải có không ít hơn p — 1 điểm minimax. Một hệ thức tương tự do Marxtôn Morx xác lập cũng đúng cho các miền nhiều chiều, nhưng trong trường hợp này thì tính đa dạng của các khả năng tôpô và của các loại điểm dừng sẽ lớn hơn rất nhiều.

4. Khoảng cách từ điểm đến mặt. Có (ít nhất) hai giá trị dừng đối với khoảng cách từ điểm P đến các điểm của đường cong kín: một giá trị cực tiểu và một giá trị cực đại. Trong trường hợp ba chiều thì ta không phát hiện được sự kiện nào mới, nếu ta chỉ giới hạn trong việc xem xét một mặt C nào đó tương đương tôpô với mặt cầu (như elipxôid chẳng hạn). Nhưng nếu mặt là loại 1 hoặc loại cao hơn thì sự việc xảy ra sẽ khác. Ta xét mặt xuyến C. Dù điểm P như thế nào, bao giờ cũng có trên mặt xuyến C những điểm có khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất tới P mà những đoạn tương ứng sẽ vuông góc với chính mặt xuyến. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng ở đây có cả các điểm minimax. Ta hình dung một trong các đường tròn « kinh tuyến » L của mặt xuyến (H. 195) và trên đường tròn L này ta tìm điểm Q gần P nhất. Sau đó, di chuyển đường tròn L theo mặt xuyến, ta có một vị trí nào đó của L sao cho khoảng cách PQ:

a) trở thành khoảng cách nhỏ nhất — lúc đó ta tìm được một điểm trên C gần P nhất;

b) trở thành khoảng cách lớn nhất — lúc này ta có điểm dừng minimax. Cũng vậy, có thể tìm trên L một điểm xa P nhất rồi sau đó tìm vị trí của L. Khoảng cách lớn nhất tìm được sẽ:

c) là cực đại (điểm tìm được ở trên C xa điểm P nhất) hoặc là cực tiểu. Vậy, ta được bốn giá trị dừng khác nhau cho khoảng cách từ các điểm trên mặt xuyến C tới điểm P.



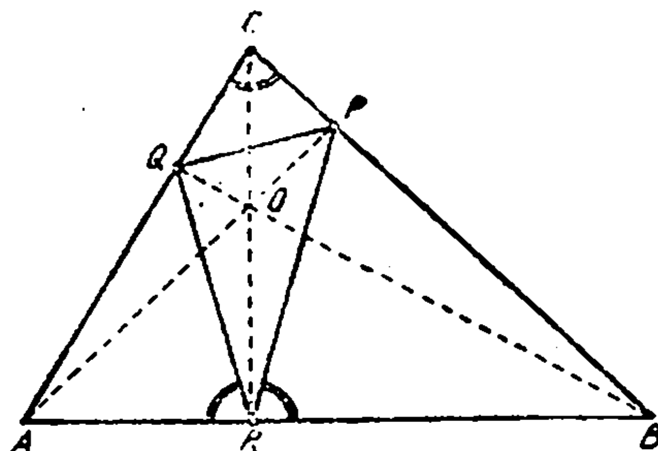
H. 195 — 196. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt

4. TAM GIÁC SVARX

1. Một chứng minh do Svarx đề xướng. Ghecman Amanđux Svarx (1843 — 1921) một nhà toán học lỗi lạc, giáo sư trường đại học tổng hợp Berlin, đã cống hiến nhiều cho sự phát triển lý thuyết hàm và giải tích hiện đại. Ông không xem là hạ thấp mình khi viết những đề tài có nội dung sơ cấp. Một trong những công trình của ông đã giành cho bài toán sau đây: hãy nội tiếp trong tam giác nhọn (có ba góc nhọn) cho trước một tam giác có chu vi nhỏ nhất (khi nói một tam giác nào đó nội tiếp trong một tam giác cho trước, ta hiểu rằng trên mỗi cạnh của tam giác đã cho có một đỉnh của tam giác đang xét). Về sau này ta sẽ chứng minh chỉ có một tam giác phải tìm: đỉnh của nó là chân các đường cao của tam giác đã cho. Một tam giác như vậy được gọi là tam giác *đường cao.*

Svarx đã chứng minh tính chất của tam giác đường cao bằng cách áp dụng phương pháp đối xứng và dựa trên định lý hình học sơ cấp sau đây: *Tại mỗi đỉnh*

P, Q, R (H. 197), hai cạnh của tam giác đường cao hợp với cạnh của tam giác đã cho những góc bằng nhau, mỗi góc đó bằng góc ở đỉnh đối diện của tam giác đã cho. Thí dụ các góc ARQ và BRP bằng góc C v.v...

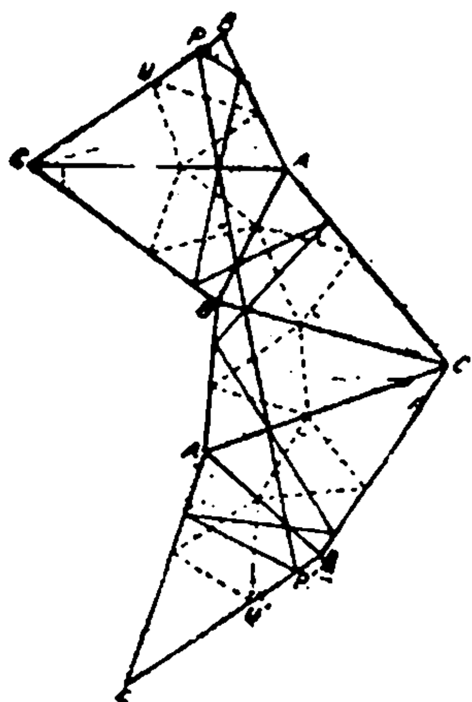


H. 197. Tam giác đường cao trong tam giác ABC

Trước hết, ta chứng minh định lý này. Vì các góc OPB và ORB vuông, cho nên có tứ giác OPBR nội tiếp được trong đường tròn. Do đó: $\widehat{PBO} = \widehat{PRO}$ (cùng chắn một cung của đường tròn ngoại tiếp). Nhưng góc PBO phụ với góc C vì tam giác CBO vuông, còn góc PRO phụ với góc PRB, cho nên $\widehat{PRB} = \widehat{C}$. Cũng lập luận như vậy với tứ giác QORA ta kết luận $\widehat{QRA} = \widehat{C}$. v.v... Kết quả này dẫn tới một hệ quả thuộc về tam giác đường cao, bởi vì, chẳng hạn $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$, cho nên khi đối xứng tam giác đã cho qua cạnh AC thì cạnh RQ sẽ có phương của PQ và ngược lại. Đối với các cạnh khác cũng tương tự.

Bây giờ ta chứng minh tính chất cực tiểu của tam giác đường cao. Cùng với tam giác đường cao ta xét một tam giác bất kỳ khác UVW nội tiếp trong tam giác ABC. Đầu tiên, ta đối xứng toàn bộ hình vẽ qua cạnh AC của tam giác ABC, sau đó lại đối xứng hình mới thu được qua cạnh AB, rồi qua cạnh BC, rồi qua cạnh AC và cuối cùng, qua cạnh AB. Như vậy ta được sáu tam giác bằng nhau, mỗi tam giác đều chứa một tam giác đường cao và một tam giác nội tiếp khác (H. 198).

Cạnh BC của tam giác sau cùng song song với cạnh BC của tam giác đầu tiên. Thực vậy trong phép đối xứng thứ nhất, cạnh BC được quay một góc 2B theo chiều kim đồng hồ, trong phép đối xứng thứ ba nó không thay đổi, trong phép đối xứng thứ tư nó quay góc 2C ngược chiều kim đồng hồ và trong phép quay thứ năm nó lại quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 2B. Rút cục, góc quay tổng cộng bằng 0.



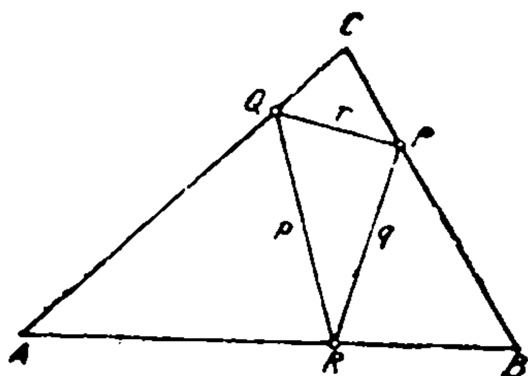
H. 198. Chứng minh của Svarx về tính chất cực tiểu của tam giác đường cao

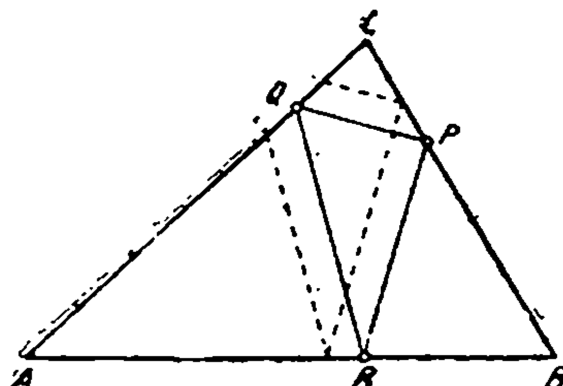
Do tính chất của tam giác đường cao đã nói ở trên mà đoạn thẳng PP' bằng hai lần chu vi tam giác PQR. Thực vậy PP' gồm sáu đoạn lần lượt bằng cạnh thứ nhất, thứ hai và thứ ba của tam giác PQR, mỗi cạnh có trong đó hai lần. Cũng vậy, đường gấp khúc nối U và U' có chiều dài bằng hai lần chu vi tam giác UVW. Đường gấp khúc này không ngắn hơn đoạn UU'. Đoạn UU' bằng PP', vì đoạn UU' song song với PP'. Vậy đường gấp khúc UU' không ngắn hơn đoạn thẳng PP', tức là chu vi tam giác đường cao không lớn hơn chu vi của một tam giác bất kỳ khác nội tiếp trong tam giác đã cho. Đó là điều phải chứng minh. Như vậy, ta đã khẳng định có tồn tại cực tiểu và cực tiểu đó đạt tới được trong trường hợp tam giác đường cao. Còn vấn đề không có tam giác nội tiếp nào khác cũng có chu vi đó thì chưa được chứng minh. Ta sẽ chứng minh điều đó sau đây.

2. Một chứng minh khác. Lời giải sau đây của bài toán Svarx có lẽ là đơn giản nhất. Nó dựa vào một định lý đã chứng minh trong chương này: nếu các điểm P và Q nằm về một phía của đường thẳng L (nhưng không nằm trên L) thì tổng các khoảng cách PR + RQ, trong đó R là một điểm trên L, sẽ cực tiểu nếu PR và QR làm thành những góc bằng nhau với L. Giả thử tam giác PQR nội tiếp trong tam giác ABC cho trước là lời giải của bài toán cực tiểu đã đề ra. Như vậy, điểm R trên cạnh AB phải là điểm sao cho tổng PR + QR nhỏ nhất. Do đó, các góc ARQ và BRP phải bằng nhau; cũng vậy, ta có $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$, $\widehat{BPR} = \widehat{CPQ}$. Bởi vậy, đối với tam giác có chu vi cực tiểu phải tìm — nếu như nó tồn tại — thì phải có các đẳng thức về góc giống như tính chất của tam giác đường cao. Còn phải chứng minh rằng với điều kiện như vậy thì tam giác của ta không thể khác tam giác đường cao. Hơn nữa, trong định lý mà ta đã dùng có giả thiết P và Q không nằm trên AB, cho nên chứng minh sẽ không dùng được cho trường hợp một trong các điểm P, Q, R trùng với một đỉnh nào đó của tam giác đã cho (trong trường hợp này chu vi của tam giác suy biến thành hai lần đường cao tương ứng). Muốn cho chứng minh được đầy đủ, còn phải chứng tỏ rằng chu vi của tam giác đường cao nhỏ hơn hai lần một đường cao tùy ý của tam giác đã cho.

Trở lại vấn đề thứ nhất, ta lưu ý rằng nếu một tam giác nội tiếp có tính chất bằng nhau về góc ở trên thì các góc được xét tại các đỉnh P, Q, R tương ứng sẽ bằng các góc A, B, C. Thực vậy, ta giả thử $\widehat{ARQ} = \widehat{BRP} = C + \delta$ chẳng hạn. Áp dụng định lý về tổng các góc trong tam giác vào các tam giác ARQ và BRP ta thấy các góc tại Q phải bằng $B - \delta$, các góc tại P phải bằng $A - \delta$. Nhưng lúc này tổng các góc của tam

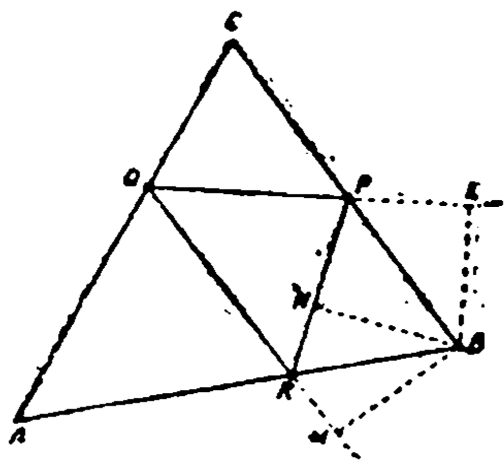
giác CPQ bằng $(A - \delta) + (B - \delta) + C = 180^0 - 2\delta$. Do đó $\delta = 0$. Ta đã biết tam giác đường cao có được những tính chất nêu trên. Một tam giác bất kỳ nào khác có tính chất này sẽ phải có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của tam giác đường cao. Nói cách khác, nó phải đồng dạng với tam giác đường cao và sắp xếp tương tự ; bạn đọc sẽ tự chứng minh ngoài tam giác đường cao ra, không còn một tam giác nào khác như vậy nữa (H. 200).





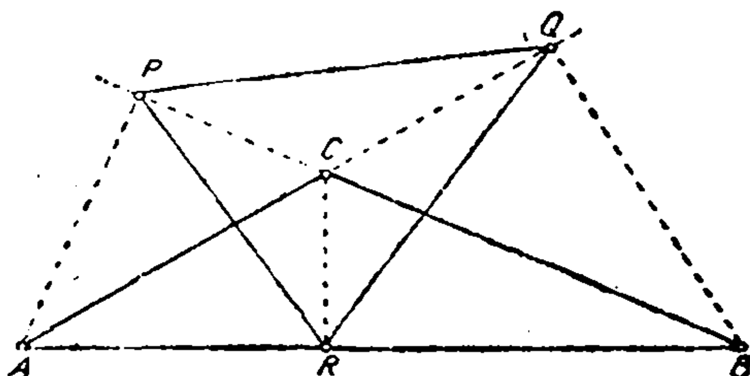
H.199 — 200. Chứng minh khác về tính chất cực tiểu của tam giác đường cao

Cuối cùng, ta chứng minh chu vi của tam giác đường cao (hạn chế trong trường hợp tam giác nhọn) nhỏ hơn hai lần một đường cao bất kỳ của tam giác đã cho. Vẽ các đường thẳng QP và QR, rồi từ đỉnh B (H. 201) hạ các đường vuông góc với QP, QR và PR. Giả thử L, M và N là chân các đường vuông góc đó. Vì các đoạn QL và QM là các hình chiếu của đường cao QB trên các đường thẳng QP và QR cho nên $QL + QM < 2QB$. Nhưng $QL + QM = p$ (p



H.201. Để chứng minh tính chất cực tiểu của tam giác đường cao

là chu vi tam giác đường cao). Thực vậy, các tam giác MRB và NRB bằng nhau vì $\widehat{MRB} = \widehat{NRB}$ và các góc tại các đỉnh M và N vuông. Suy ra RM = RN và QM = = QR + RN. Cũng vậy, ta có PN = PL và QL = = QP + PN. Suy ra : QL + QM = QP + PN + QR + + RN = QP + PR + RQ = p. Trước đây ta đã chứng minh rằng 2QB > QL + QM. Vậy, p nhỏ hơn hai lần chiều cao QB. Lập luận này cũng áp dụng được cho mỗi chiều cao còn lại. Tính chất cực tiểu của tam giác đường cao đã được chứng minh hoàn toàn.



H. 202. Tam giác đường cao trong tam giác tù.

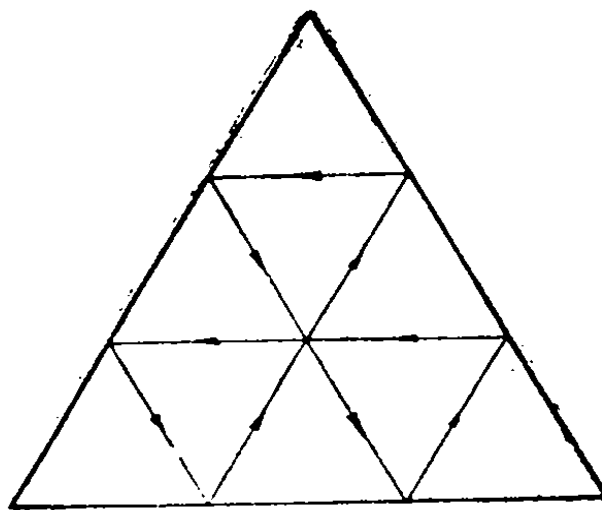
Ngoài ra, phép dựng đã nêu còn giúp ta tính p một cách trực tiếp. Ta biết rằng các góc PQC và RQA bằng góc B, tức là $\widehat{PQB} = \widehat{RQB} = 90^0 - B$ và $\cos \widehat{PQB} = \sin B$. Nhờ các kiến thức lượng giác sơ cấp, ta suy ra QM = QL = QBsinB và p = 2QBsinB. Cũng vậy, có thể chứng minh rằng p = 2PAsinA = 2RCsinC. Trong lượng giác ta đã biết RC = asinB = bsinA v.v... cho nên: p = 2asinBsinC = 2bsinCsinA = 2CsinAsinB. Cuối cùng, nếu gọi bán kính đường tròn ngoại tiếp là r và để ý rằng a = 2rsinA, b = 2rsinB, C = 2rsinC, ta có công thức đối xứng :

$$p = 4r\sin A \sin B \sin C.$$

3. Các tam giác có góc tù. Trong hai chứng minh trước, ta đã giả thiết cả ba góc A, B, C đều nhọn. Nếu góc C tù (H. 202) thì các điểm P và Q sẽ nằm ở ngoài tam giác. Bởi thế, nói một cách chặt chẽ thì tam giác đường cao sẽ không thể coi là tam giác nội tiếp trong tam giác đã cho nếu như ta không qui ước từ trước rằng, một tam giác được gọi là nội tiếp một tam giác khác nếu như các đỉnh của nó nằm trên các cạnh của tam giác cho trước hoặc nằm trên phần kéo dài của các cạnh đó. Dù thế nào đi chăng nữa, tam giác đường cao theo nghĩa rộng cũng không có chu vi cực tiểu, bởi vì $PR > CR$, $QR > CR$ và $p = PR + QR + PQ > 2CR$. Phần thứ nhất của chứng minh trước đã chỉ ra rằng, nếu không có tam giác đường cao thì chu vi cực tiểu phải bằng một trong các đoạn gấp đôi một đường cao. Từ đó dễ dàng suy ra: « tam giác nội tiếp » có chu vi nhỏ nhất trong tam giác tù chính là chiều cao hạ từ đỉnh góc tù tính theo cả hai hướng. Mặc dù ở đây không có tam giác theo nghĩa hẹp. Song có thể chỉ ra những tam giác nội tiếp thực sự có chu vi khác với đoạn gấp đôi đường cao một lượng tùy ý nhỏ. Trong trường hợp trung gian, khi tam giác đã cho là tam giác vuông thì cả hai lời giải (tam giác đường cao và đoạn gấp đôi đường cao hạ từ đỉnh góc vuông) sẽ trùng nhau.

Vấn đề, có hay không có tính chất cực trị đối với tam giác đường cao trong một tam giác tù cho trước đã không làm mất sự lý thú của nó. Không có điều kiện nghiên cứu tỉ mỉ vấn đề này, ta chỉ lưu ý rằng, những tam giác đường cao như vậy sẽ không làm cực tiểu tổng các cạnh $p + q + r$, nhưng lại bảo đảm được giá trị dừng loại minimax đối với biểu thức dạng $p + q - r$, trong đó r là cạnh của tam giác nội tiếp (theo nghĩa rộng) tương ứng với góc tù.

4. Tam giác tạo bởi các tia sáng. Nếu ta giả thiết tam giác ABC là một căn buồng có tường bằng gương thì tam giác đường cao là một chu tuyến tam giác duy nhất có thể tạo thành bởi một tia sáng. Như H.203 đã chứng tỏ, các chu tuyến đa giác đóng kín khác không bị loại trừ, nhưng trong số đó chỉ tam giác đường cao có ba cạnh.



H.203. Đường tia sáng đóng kín trong đường tam giác.

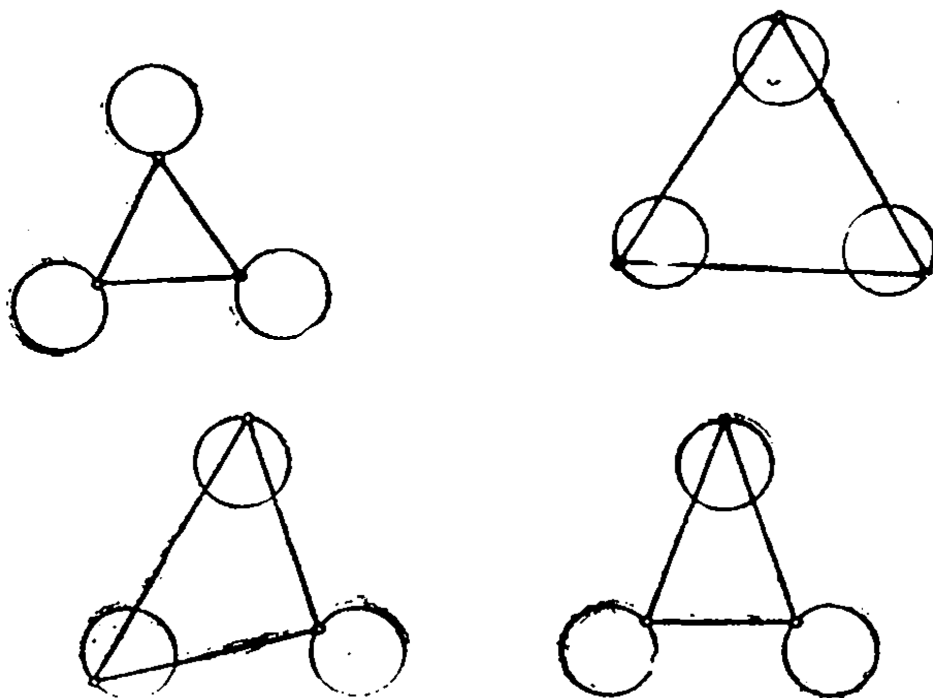
Ta mở rộng bài toán đang xét và tự hỏi về «những tam giác ánh sáng» có thể có được trong một miền tùy ý, giới hạn bởi một hoặc một số đường cong trơn. Nói chính xác hơn, ta để ý đến các tam giác mà đỉnh của chúng nằm trên các đường cong cho trước và hai cạnh kề nhau tạo với đường cong tương ứng những góc bằng nhau. Trong $\S_1$ ta đã thấy sự bằng nhau của các góc là điều kiện cần cho cực đại cũng như cực tiểu của tổng các cạnh tương ứng tùy theo loại tam giác ánh sáng có thể tạo ra. Chẳng hạn, khi xét miền trong của một đường cong trơn duy nhất C đóng kín, ta có thể nói rằng tam giác nội tiếp có chu vi cực đại phải là «tam giác ánh sáng» với các tính chất đã nêu ở trên. Hoặc giả ta cho rằng mỗi đỉnh của tam giác ABC có thể nằm trên một trong ba đường cong trơn đóng kín tương ứng với nó (tư tưởng của Marxtôn Morx). Bây giờ, các tam giác ánh sáng được đặc trưng bởi tính chất là, chu vi của chúng có giá trị dừng. Nhưng loại giá trị dừng này có thể cực tiểu đối với cả ba đỉnh A, B, C hoặc có thể cực tiểu đối với hai đỉnh bất kỳ và

cực đại đối với đỉnh thứ ba hoặc cực tiểu đối với một đỉnh bất kỳ và cực đại đối với hai đỉnh kia hoặc cuối cùng, có thể cực đại đối với cả ba đỉnh.

Bởi thế, có tất cả ít nhất $2^3 = 8$ loại tam giác ánh sáng, vì độc lập với các đỉnh còn lại, mỗi đỉnh đều có cực đại hoặc cực tiểu.

*** 5 Những chú ý có liên quan đến các bài toán đối xứng và các chuyển động êgôđic**

Trong động học và quang học, việc mô tả đường đi hoặc « quĩ đạo » của một phần tử hoặc một tia sáng trong không gian trong suốt một khoảng thời gian vô tận, là nhiệm vụ quan trọng hàng đầu. Giả thử có một



H. 204 — 207. Bốn loại tam giác ánh sáng giữa ba đường tròn.

thiết bị nào đấy buộc một phần tử hoặc một tia ở lại trong một phần giới hạn nào đó của không gian, ta sẽ xác định xem quĩ đạo của nó có lấp đầy phần không gian đó hầu khắp nơi, với « mật độ » gần đều

hay không. Một quĩ đạo có tính chất như vậy được gọi là một quĩ đạo *êgôđic.* Giả thiết về sự tồn tại của quĩ đạo êgôđic là giả thuyết ban đầu để áp dụng các phương pháp thống kê trong các lý thuyết động học và nguyên tử hiện đại. Nhưng ta mới chỉ biết rất ít tình huống mà trong đó có thể tiến hành được chứng minh toán học chặt chẽ cho « giả thuyết êgôđic ».

Những thí dụ đơn giản nhất về loại này đều thuộc vào trường hợp chuyển động xảy ra trên phần mặt phẳng ở bên trong một đường cong kín C với giả thiết « bức tường » C là một tấm gương hoàn hảo về mặt toán học, phản xạ một phần tử với một góc bằng với góc mà nó đập vào tường. Chẳng hạn, một cái hộp hình chữ nhật — một cái bàn bi-a lý tưởng phản xạ tốt mà phần tử được xét là quả cầu bi-a — sẽ bảo đảm một chuyển động êgôđic: một « quả bi-a » lý tưởng sẽ có mặt trong một lân cận bất kỳ cho trước của một điểm cho trước trong khoảng thời gian vô tận nếu chỉ loại trừ một số vị trí ban đầu đặc biệt và một số hướng của chuyển động. Ta không nêu chứng minh ở đây, mặc dầu không có khó khăn gì về nguyên tắc.

Đặc biệt lý thú là chuyển động trên bàn hình elip với các tiêu điểm F_1 và F_2. Vì tiếp tuyến của elip làm những góc bằng nhau với các đoạn nối từ các tiêu điểm đến các tiếp điểm, cho nên mỗi quĩ đạo đi qua một tiêu điểm sẽ cho một phản xạ đi qua tiêu điểm kia v.v... Dễ nhận ra rằng sau n phản xạ, độc lập đối với vị trí ban đầu, quĩ đạo sẽ dần tới trục lớn F_1F_2 khi n tăng vô hạn. Nếu tia ban đầu không đi qua tiêu điểm thì có hai khả năng. Hoặc tia ban đầu đi *giữa hai tiêu điểm*: lúc này mọi quĩ đạo phản xạ sẽ đi qua hai tiêu điểm; hơn nữa sẽ tiếp xúc với một hypebol vào đó với tiêu điểm F_1 và F_2. Hoặc tia ban đầu *không gián cách các tiêu điểm*: lúc này mọi tia phản xạ cũng sẽ có tính chất

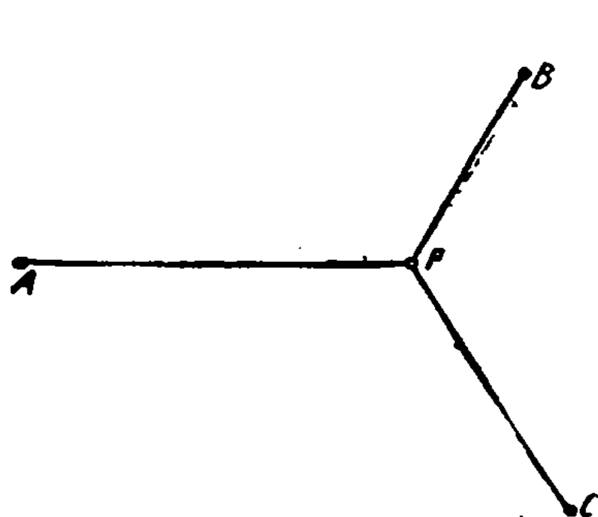
như thế; hơn nữa mọi tia phản xạ đó sẽ tiếp xúc với một elip nào đó với tiêu điểm F_1 và F_2. Như vậy, chuyển động bên trong một elip không phải là chuyển động êgôđic với bất cứ điều kiện ban đầu nào.

§5. BÀI TOÁN STÂYNE

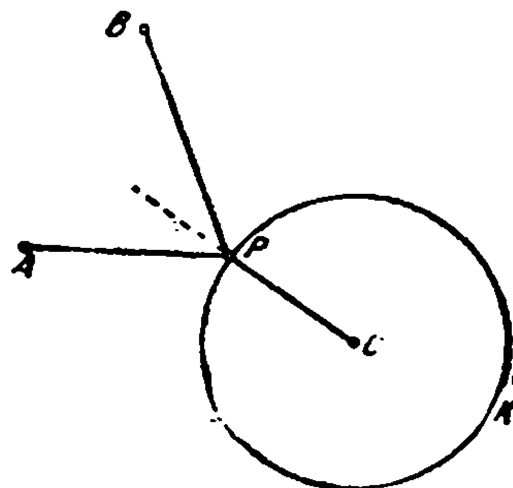
1. Bài toán và lời giải của nó. Một bài toán rất đơn giản đồng thời có tính chất giáo huấn đã được nhà hình học Berlin nổi tiếng Iacôp Stâyne nghiên cứu vào đầu thế kỷ trước. Cần nối ba làng A, B, C bằng một hệ thống đường sao cho độ dài tổng cộng của chúng là nhỏ nhất. Dạng diễn đạt toán học chính xác hơn là: Cho ba điểm A, B, C trên mặt phẳng. Tìm một điểm thứ tư P sao cho tổng $a + b + c$ (trong đó a, b, c là các khoảng cách tương ứng của P đến A, B, C) cực tiểu. Lời giải của bài toán là như sau: nếu trong tam giác ABC tất cả các góc nhỏ hơn 120^0 thì phải lấy P là điểm nhìn ba cạnh AB, BC, CA dưới góc 120^0 nếu một góc của tam giác ABC, chẳng hạn C, lớn hơn hoặc bằng 120^0 thì điểm P trùng với điểm C.

Việc lý giải kết quả này không có gì khó khăn nếu vận dụng lời giải của các bài toán cực trị đã xét ở trên. Ta giả thiết P là điểm phải tìm. Có hai khả năng loại trừ nhau: hoặc P trùng với một trong các đỉnh A, B, C hoặc P khác cả ba đỉnh. Trong trường hợp đầu thì tất nhiên P phải là đỉnh của chính góc lớn C trong tam giác ABC vì tổng $CA + CB$ nhỏ hơn tổng hai cạnh kia của tam giác ABC. Muốn giải quyết toàn bộ vấn đề, còn phải phân tích trường hợp thứ hai. Giả thử K là đường tròn bán kính c. Bây giờ điểm P phải nằm trên K sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất. Nếu cả hai điểm A và B ở ngoài K (như H.209) thì theo §1, các đoạn PA và PB phải tạo những góc bằng nhau với đường tròn K và

do đó với bán kính PC vuông góc với K. Vì lập luận này có thể lặp lại với đường tròn tâm A bán kính a cho nên mọi góc tạo bởi các đoạn PA, PB, PC bằng nhau và mỗi góc bằng 120° như đã nói ở trên. Chứng minh của ta được xây dựng trên giả thiết cả hai điểm A và B ở ngoài K, ta sẽ chứng minh không thể



H. 208. Bài toán Stâyne
PA + PB + PC = cực tiểu

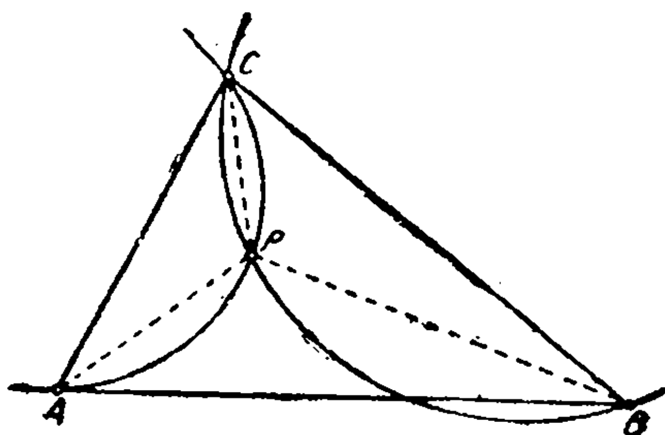


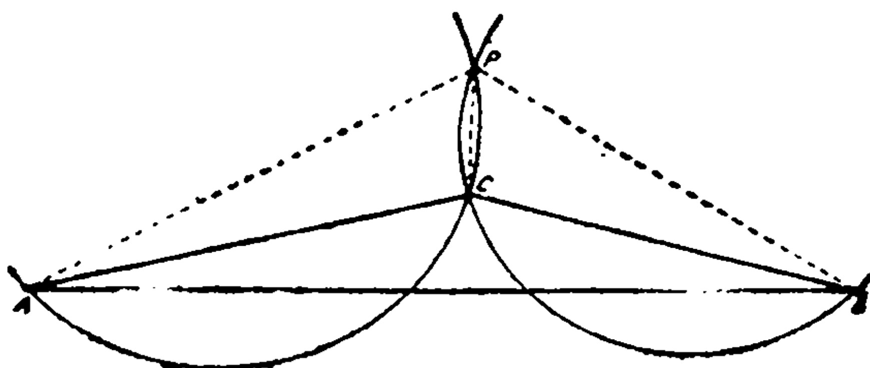
H. 209. Dùng cho bài toán Stâyne.

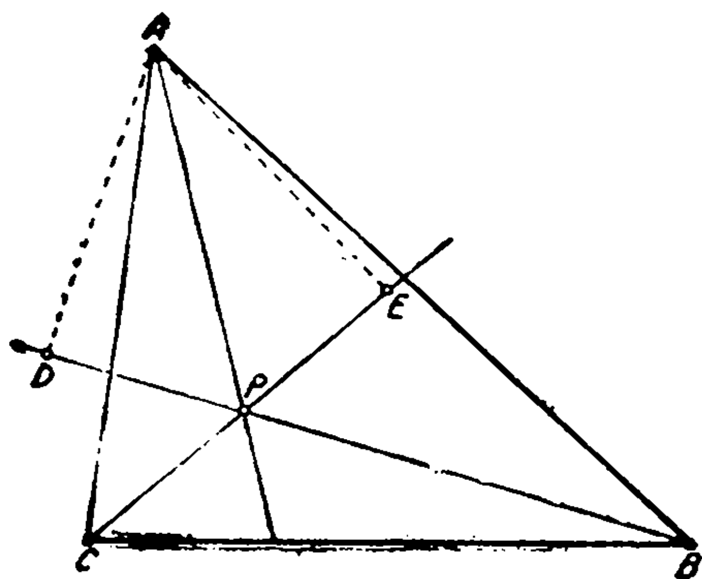
khác thế được. Giả thử ít nhất một trong hai điểm A, B, chẳng hạn A nằm trong đường tròn K hoặc trên nó. Lúc đó AC ⩽ c. Mặt khác, vì tổng a + b ⩾ AB với sự sắp xếp tùy ý các điểm A, B, P cho nên a + b + c ⩾ AB + AC. Đẳng thức sau cùng này chứng tỏ khi P trùng với A thì tổng a + b + c sẽ đạt tới giá trị nhỏ nhất có thể được. Điều này mâu thuẫn với giả thiết P khác với A, B, C. Thế là, ta đã chứng minh được các điểm A và B nằm ngoài hình tròn K. Cũng vậy, các điểm B, C nằm ngoài hình tròn tâm A bán kính a; các điểm A, C nằm ngoài hình tròn tâm B bán kính b.

2. Phân tích các khả năng xảy ra. Muốn xác định xem khả năng nào trong hai khả năng sẽ xảy ra, ta phải trở lại cách dựng điểm P. Muốn tìm điểm P từ đó nhìn các cạnh AC và BC dưới góc 120° chỉ cần vẽ

đường tròn K_1 đi qua các điểm A và C mà phần cung nhỏ AC chứa 120^0, và qua các điểm B, C vẽ đường tròn K_2 cũng có tính chất như vậy, sau đó, lấy giao điểm của hai cung chứa 120^0 nếu hai cung đó cắt nhau. Tất nhiên, điểm P tìm được bằng cách như vậy sẽ nhìn đoạn AB dưới góc 120^0 vì tổng của ba góc ở đỉnh P bằng 360^0.







H. 210 — 212. Dùng cho việc phân tích các khả năng khác nhau trong bài toán Stâyne.

Từ H. 210 ta thấy nếu cả ba góc của tam giác ABC đều nhỏ hơn 120^0, thì hai cung nói trên phải cắt nhau ở bên trong tam giác. Mặt khác, nếu một góc của tam giác ABC, như C chẳng hạn, lớn hơn 120^0 thì các cung mà ta nói đến sẽ không cắt nhau (H. 211). Trong trường hợp này, điểm P không tồn tại : các đường tròn K_1 và K_2 cắt nhau tại điểm P' từ đó nhìn các cạnh AC và BC dưới một góc 60^0 và chỉ có cạnh AB đối diện với góc tù được nhìn dưới góc 120^0 mà thôi.

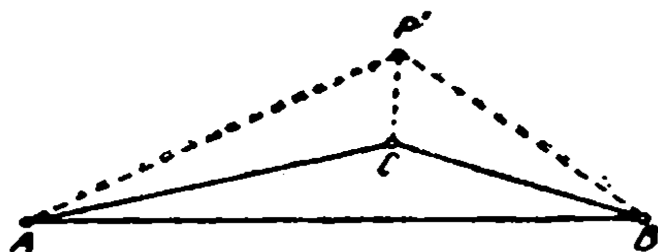
Nếu một góc của tam giác lớn hơn 120^0 thì, như ta vừa thấy, không có điểm P từ đó mỗi cạnh đều được nhìn dưới góc 120^0, nghĩa là điểm phải tìm (điểm tại đó đạt cực tiểu) phải trùng với một trong các đỉnh (vì theo §1, đó là một khả năng duy nhất), tức là trùng với đỉnh góc tù.

Nếu tất cả các góc của tam giác nhỏ hơn 120^0 thì có thể dựng điểm P từ đó nhìn các cạnh dưới góc 120^0. Nhưng còn phải chứng minh với điểm P như vậy thì tổng $a + b + c$ sẽ nhỏ hơn so với một đỉnh bất kỳ khác của tam giác (bởi vì còn chưa biết trường hợp nào trong hai trường hợp loại trừ nhau sẽ xảy ra).

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a + b + c$ nhỏ hơn $AB + AC$ (H.212). Muốn thế ta kéo dài đoạn BP và chiếu điểm A lên đường thẳng vừa thu được. Giả thử hình chiếu đó là D. Vì $\widehat{APD} = 60^0$ cho nên độ dài hình chiếu PD bằng $\frac{1}{2}a$. Vì BD là hình chiếu của AB trên đường thẳng BP cho nên $BD < AB$. Nhưng $BD = b + \frac{1}{2}a$ cho nên $b + \frac{1}{2}a < AB$. Cũng hoàn toàn tương tự, khi chiếu A trên phần kéo dài của đoạn PC, ta thấy rằng $c + \frac{1}{2}a < AC$. Cộng hai bất đẳng thức cuối cùng ta có : $a + b + c < AB + AC$. Vậy điểm

phải tìm không thể nằm tại đỉnh A. Tương tự, vì nó cũng không thể nằm tại các đỉnh B và C, cho nên điểm P nhìn các cạnh dưới góc 120° là lời giải của bài toán.

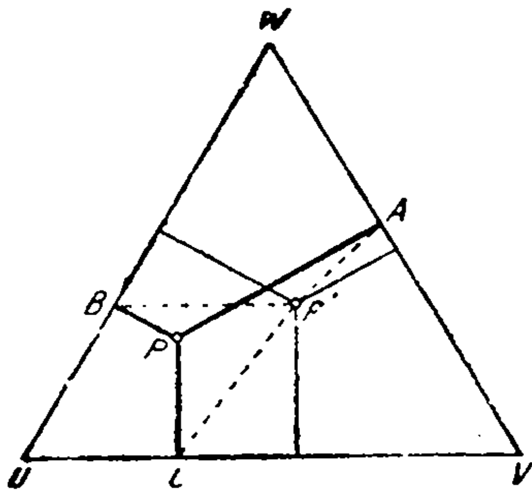
3. Bài toán bổ sung. Các phương pháp toán học hình thức thường dẫn ta đi xa hơn mục tiêu đã định trước. Chẳng hạn, nếu góc ở đỉnh C lớn hơn 120° thì thay cho điểm P (ở đây nó trùng với điểm C), qui trình dựng hình học sẽ cho một điểm P' khác — là điểm từ đó nhìn cạnh lớn nhất AB của tam giác dưới góc 120° và nhìn hai cạnh kia dưới góc 60°. Tất nhiên, điểm P' sẽ không cho lời giải của bài toán đang xét, nhưng có thể đoán nhận rằng nó có một quan hệ nào đó với bài toán. Thực vậy điểm P' là lời giải của bài toán cực tiểu hóa biểu thức a + b — c. Chứng minh là hoàn toàn tương tự với chứng minh đã trình bày ở trên cho trường hợp biểu thức a + b + c và dựa vào những kết quả trực tiếp ở § 1 mục 5. Kết hợp các kết luận thu được với nhau ta sẽ đi đến một định lý tổng quát.



H. 213. Bài toán bổ sung.

Nếu tất cả các góc của tam giác ABC nhỏ hơn 120° thì tổng a + b + c của các khoảng cách a, b, c của một điểm nào đó tới các điểm A, B, C (theo thứ tự đó) sẽ đạt cực tiểu tại điểm P mà từ đó mỗi cạnh được nhìn dưới góc 120°, còn biểu thức a + b — c sẽ đạt cực tiểu ở đỉnh C. Nếu một góc như góc C chẳng hạn, lớn hơn 120° thì a + b + c đạt cực tiểu tại điểm C, còn a + b — c đạt cực tiểu tại điểm P' mà từ đó hai cạnh nhỏ được nhìn dưới góc 60°, còn cạnh lớn được nhìn dưới góc 120°.

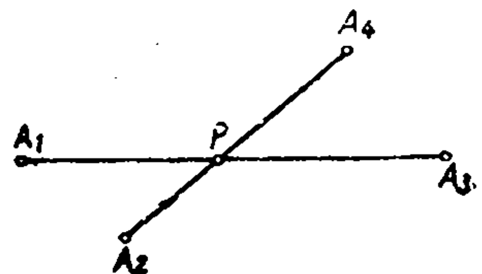
Bởi thế, trong hai bài toán cực tiểu, bao giờ cũng có một bài toán được giải bằng cách dựng các đường tròn còn lời giải bài toán kia là một trong các đỉnh. Nếu $\widehat{C} = 120°$, hai lời giải của hai bài toán sẽ trùng nhau bởi vì điểm thu được trong phép dựng hình học là đỉnh C.



H. 214. Một chứng minh khác cho sự đúng đắn của lời giải Stâyne.

4. **Chú ý.** Từ một điểm P bất kỳ chọn ở bên trong một tam giác đều UVW, ta hạ các đường PA, PB, PC vuông góc với ba cạnh (H. 214). Khi đó các điểm A, B, C và P tạo thành một hình như ta đã xét ở trên. Có thể áp dụng chú ý này khi giải bài toán Stâyne : chỉ cần tìm các đỉnh của tam giác đều UVW từ các điểm A, B, C.

5. **Mở rộng: Bài toán mạng đường phố.** Trong bài toán Stâyne thì ba điểm A, B, C được cho trước. Lẽ tự nhiên ta sẽ mở rộng bài toán này cho trường hợp n điểm cho trước A_1, $A_2 \ldots A_n$ như sau : Tìm trong mặt phẳng một điểm P sao cho tổng các khoảng cách a_1, $a_2 \ldots a_n$ (trong đó a_i biểu thị khoảng cách PA_i) đạt cực tiểu (trong trường hợp bốn điểm được xếp đặt như đã chỉ trên H. 215 thì phải lấy P là giao điểm các đường chéo A_1A_2 và A_3A_4 của tứ giác (đề nghị bạn đọc kiểm tra lại để luyện tập). Bài toán mở rộng này (cũng

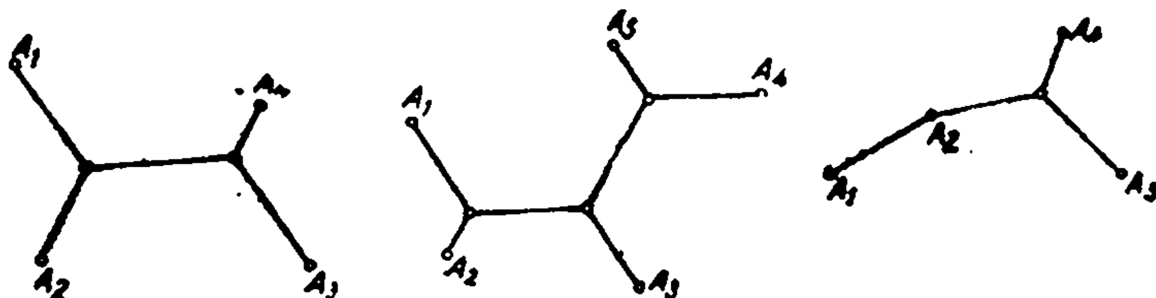


H. 215. Cực tiểu của tổng các khoảng cách tới bốn điểm.

được Stâyne nghiên cứu) không dẫn đến những kết quả thú vị. Trong trường hợp này ta có một sự mở rộng hời hợt mà những mở rộng tương tự như vậy là ít gặp trong một tài liệu toán học. Muốn có được một sự mở rộng thực sự bài toán Stâyne thì phải từ bỏ việc tìm kiếm một điểm P duy nhất. Thay vào đó, ta đặt nhiệm vụ xây dựng một « mạng đường phố » hoặc một « mạng đường nối các làng cho trước » có độ dài tổng cộng cực tiểu. Chính xác hơn: Cho n điểm A_1, A_2,... A_n. Tìm một hệ thống các đoạn thẳng sao cho:

1) hai điểm bất kỳ có thể liên hệ với nhau bởi một đường gấp khúc mà các cạnh của nó là các đoạn thuộc hệ thống;

2) Độ dài tổng cộng của hệ thống là cực tiểu*. Việc giải bài toán này phụ thuộc vào việc sắp đặt các điểm cho trước. Xuất phát từ bài toán Stâyne, bạn đọc có



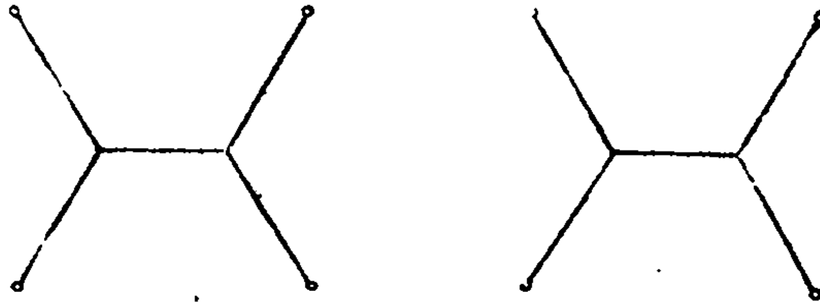
H. 216 – 218. Hệ thống đường ngắn nhất nối các điểm cho trước.

thể nghiên cứu cẩn thận hơn vấn đề này. Ở đây, chúng ta chỉ nêu kết quả của những trường hợp điển hình vẽ trên H. 216 — 218. Trong thí dụ thứ nhất, lời giải là hệ thống năm đoạn thẳng với hai « điểm bội », tại đó có ba đoạn qui tụ tạo với nhau góc 120°. Trong thí

---

*. Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu các phương pháp chung để giải các bài toán ứng dụng thuộc loại như trên là đối tượng của chương *trình hóa tuyến tính*.

dụ thứ hai thì số điểm bội bằng ba. Với các cách sắp đặt khác của những điểm cho trước thì sẽ không có hình đã nêu; có thể có trường hợp « suy biến » khi một hoặc nhiều điểm cho trước là « điểm bội » của mạng — đó là trường hợp thí dụ thứ ba.



H. 219—220. Hệ thống đường ngắn nhất nối các đỉnh hình vuông

Nếu số điểm cho trước bằng n thì bao giờ cũng có không quá n — 2 điểm bội, tại đó qui tụ ba đoạn tạo thành những góc 120°. Lời giải của bài toán không phải bao giờ cũng duy nhất. Chẳng hạn, nếu bốn điểm cho trước là bốn đỉnh của một hình vuông thì có hai lời giải tương đương (H.219—220). Nếu các điểm A_1, A_2,... A_n là các đỉnh của một đường gấp khúc mà các góc ở đỉnh khá gần 180° thì bản thân đường gấp khúc sẽ là lời giải.

§6. CỰC TRỊ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Một trong những đặc điểm của các phần cao cấp của toán học là vai trò xuất sắc của bất đẳng thức. Về thực chất thì mọi bài toán cực đại đều qui về bất đẳng thức, biểu thị rằng đại lượng biến thiên đang xét không vượt quá một giá trị cực đại nào đó sẽ là lời giải của bài toán. Trong nhiều trường hợp, các bất đẳng thức thu được bằng cách như vậy là đáng được

chú ý và độc lập với bài toán cực trị tương ứng. Bây giờ, để làm thí dụ, ta sẽ xét một bất đẳng thức quan trọng, liên hệ trung bình cộng và trung bình nhân.

1) Trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương. Trước hết, ta nghiên cứu một bài toán cực đại đơn giản thường gặp trong bản thân toán học và cả trong những ứng dụng của nó. Cách diễn đạt hình học của bài toán là như sau: Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi cho trước, hãy tìm hình có diện tích lớn nhất. Cũng dễ đoán ra lời giải là hình vuông. Có thể chứng minh bằng lập luận sau đây. Giả thử chu vi cho trước là $2a$. Như vậy tổng $x + y$ các độ dài hai cạnh kề nhau của hình chữ nhật sẽ bằng a không đổi. Trung bình cộng của hai đại lượng x và y là biểu thức

$$m = \frac{x+y}{2}.$$

Ta đưa thêm vào đại lượng $d = \frac{x-y}{2}$ và có hệ thức:

$$x = m + d,\ y = m - d.$$

Từ đó suy ra $xy = (m + d)(m - d) = m^2 - d^2 =$

$$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - d^2.$$

Vì d^2 không thể âm và chỉ triệt tiêu khi $x = y$, cho nên ta có ngay bất đẳng thức $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ (1)

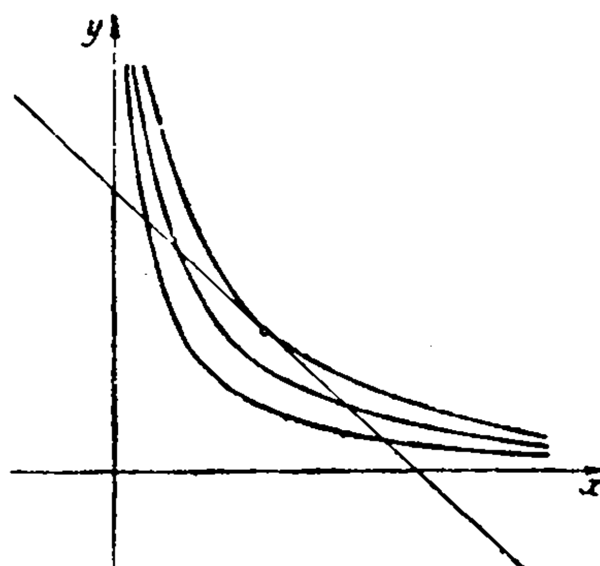
Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $d = 0$, tức là khi $x = y$. Vì $x + y$ có giá trị a không đổi, cho nên biểu thức $\sqrt{xy}$ và cũng tức là diện tích xy sẽ nhận giá trị lớn nhất khi $x = y$. Biểu thức $g = \sqrt{xy}$ (căn thức số học — có dấu +) được gọi là «trung bình nhân» của hai số dương x và y; bất đẳng thức (1) biểu thị một hệ thức cơ bản giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

Bất đẳng thức (1) cũng suy ra trực tiếp từ biểu thức :

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy},$$

là một bình phương đúng sẽ không âm và chỉ triệt tiêu khi $x = y$.

Sau đây là một kết luận hình học nữa của bất đẳng thức này. Trong mặt phẳng x, y ta xét một đường thẳng cố định $x + y = 2m$ và một họ đường cong (hypebol) $xy = c$, trong đó c là không đổi với mỗi đường cong nhưng thay đổi theo từng đường cong. Từ H.221 ta thấy rõ ràng đường cong có ít nhất một điểm chung với đường thẳng và tương ứng với giá trị c lớn nhất là hypebol tiếp xúc với đường thẳng tại điểm $x = y = m$. Do đó, đối với hypebol này thì $c = m^2$. Vậy:



H. 221. Cực tiểu của xy với giá trị cho trước của x + y.

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Cần lưu ý rằng mọi bất đẳng thức dạng $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ đều có thể được đọc bằng hai cách, vì thế nó sinh ra các tính chất cực đại và cực tiểu. Chẳng hạn, bất đẳng thức (1) cũng biểu thị sự kiện là trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích cho trước thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

2. Mở rộng trường hợp cho n biến. Bất đẳng thức (1) liên hệ trung bình cộng và trung bình nhân của hai số

dương có thể mở rộng được cho n số dương bất kỳ mà ta ký hiệu là $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$. Trung bình cộng của các số dương là

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

còn trung bình nhân là $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ (ở đây ta chỉ xét căn dương). Định lý tổng quát khẳng định : $g \leqslant m$(2); đẳng thức chỉ có thể xảy ra khi tất cả các x_i bằng nhau.

Nhiều chứng minh thú vị của kết quả tổng quát này đã được thực hiện. Phương pháp đơn giản nhất là áp dụng lập luận đơn giản như đã tiến hành trong mục 1. Trước mắt chúng ta có bài toán:

Phân tích một số dương C cho trước thành n số hạng dương: $C = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ sao cho tích $P = x_1.x_2.x_3 \ldots x_n$ lớn nhất. Ta xuất phát từ giả thiết là P có giá trị lớn nhất và đạt tới giá trị đó tại $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, thoạt nhìn thì có vẻ hiển nhiên, nhưng ta sẽ có dịp phân tích nó về sau này (7). Chỉ cần xác định $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ vì trong trường hợp đó thì $g = m$. Giả thử không phải như vậy, $a_1 \neq a_2$ chẳng hạn. Lúc này ta xét các giá trị

$$x_1 = s,\ x_2 = s,\ x_3 = a_3,\ \ldots,\ x_n = a_n$$

trong đó $s = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

Nói cách khác, ta sẽ thay thế hệ thống giá trị trước đây của các đại lượng x_i bằng một hệ thống mới, chỉ khác hệ trước ở giá trị của hai đại lượng x_1 và x_2 mà tổng C vẫn không thay đổi. Ta có thể viết:

$$a_1 = s + d, \qquad a_2 = s - d,$$

trong đó ta đặt $d = \dfrac{a_1 - a_2}{2}$.

Tích mới sẽ bằng $P' = s^2 a_3 \ldots a_n$, tích cũ là $P = (s + d)(s - d) a_3 \ldots a_n = (s^2 - d^2) a_3 \ldots a_n$. Rõ ràng

khi $d \neq 0$ thì $P < P'$, điều này trái với giả thiết là tích P có giá trị cực đại. Vậy $d = 0$ và khi đó $a_1 = a_2$. Cũng vậy, ta sẽ chứng minh $a_1 = a_i$, trong đó a_i là một số a bất kỳ, từ đó suy ra mọi số a bằng nhau. Ta đã chứng minh rằng: 1) $g = m$, nếu mọi số x_i bằng nhau. 2) g đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi mọi số x_i bằng nhau. Do đó có thể kết luận: trong mọi trường hợp khác thì $g < m$. Định lý đã được chứng minh.

3. Phương pháp bình phương nhỏ nhất. Trung bình cộng của n số $x_1, x_2, \ldots x_n$ (ở đây không cần phải buộc là số dương) có tính chất cực tiểu đặc biệt. Giả thử u là giá trị bằng số của một đại lượng chưa biết nào đó mà ta muốn xác định hết sức chính xác bằng một dụng cụ đo nào đó. Giả thử, để làm việc đó ta đã thực hiện n phép đo cho các kết quả $x_1, x_2, \ldots x_n$ khác nhau một chút do những nguyên nhân khác nhau không thể tránh khỏi của sai số đo đạc. Nảy ra vấn đề: phải gán cho đại lượng u giá trị nào để độ tin cậy là lớn nhất? Người ta thừa nhận rằng giá trị trung bình là giá trị « thực » hoặc « tối ưu »

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Không thể lý giải quy trình kể trên được nếu không đi sâu vào những lập luận thuộc phạm vi lý thuyết xác suất. Ở đây, ta chỉ có thể nhấn mạnh một tính chất cực tiểu của trung bình cộng m nhằm xác minh ở một chừng mực nhất định cho việc lựa chọn nó. Giả thử u là một giá trị bằng số nào đó của đại lượng được đo. Khi đó các hiệu $u - x_1$, $u - x_2$, ..., $u - x_n$ là độ chênh lệch của đại lượng đó so với các kết quả quan sát riêng biệt. Những độ lệch này có thể có một phần dương, một phần âm và hoàn toàn tự nhiên dẫn tới một lựa chọn tối ưu u nào đó mà độ lệch « tổng cộng » (theo một ý

nghĩa nào đó) nhỏ nhất có thể được. Theo Gaux, người ta thường không lấy bản thân độ lệch làm «phương tiện do sự không chính xác», mà lấy bình phương của chúng $(u - x_i)^2$, rồi tìm giá trị tối ưu u sao cho độ lệch «tổng cộng» đạt cực tiểu (với độ lệch tổng cộng là tổng bình phương của các độ lệch riêng rẽ).

Giá trị tối ưu được xác định theo cách như vậy chính là trung bình cộng m. Đó là mệnh đề cơ sở của «phương pháp bình phương nhỏ nhất» nổi tiếng do Gaux sáng tạo ra. Chúng ta sẽ cố gắng chứng minh khẳng định đó bằng phương pháp đơn giản nhất. Nếu ta viết :

$$(u - x_i) = (m - x_i) + (u - m),$$

thì ta có:

$$(u - x_i)^2 = (m - x_i)^2 + (u - m)^2 + 2(m - x_i)(u - m).$$

Đặt i = 1, 2... n và cộng tất cả các đẳng thức như vậy lại. Số hạng cuối cùng khi đó là $2(u - m) \times \times (nm - x_1 - \ldots - x_n)$. Biểu thức này bằng 0 theo định nghĩa của m. Do đó, ta có:

$$(u - x_1)^2 + (u - x_2)^2 + \ldots + (u - x_m)^2 = (m - x_1)^2 + + (m - x_2)^2 + \ldots + (m - x_n)^2 + n(u - m)^2.$$

Từ đó, rõ ràng là:

$$(u - x_1)^2 + (u - x_2)^2 + \ldots + (u - x_n)^2 \geqslant (m - x_1)^2 + + (m - x_2)^2 + \ldots + (m - x_n)^2.$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi u = m. Đó chính là điều mà ta phải chứng minh.

Phương pháp bình phương nhỏ nhất tổng quát thừa nhận một nguyên tắc chủ đạo — cực tiểu hóa tổng các bình phương — trong mọi trường hợp phức tạp cần phải phối hợp một loạt những quan sát cho trước có mâu thuẫn chút ít với nhau. Chẳng hạn, ta hình dung đã đo được các tọa độ x_i, y_i của n điểm mà nếu nói về mặt lý thuyết phải nằm trên một đường thẳng và giả

thiết rằng những điểm thu được bằng thực nghiệm như vậy không hoàn toàn nằm trên một đường thẳng. Làm thế nào để chọn một đường thẳng sát với những điểm đó nhất? Nguyên tắc chủ đạo dẫn đến thủ thuật sau đây (có thể thay thế nó bằng những quy trình khác nếu dựa vào những lập luận khác). Giả thử $y = ax + b$ là phương trình của đường thẳng phải tìm; bài toán của chúng ta bao gồm việc xác định các hệ số a và b. Khoảng cách từ đường thẳng tới các điểm x_i, y_i (đo được theo hướng của trục y), bằng $y_i - (ax_i + b)$ hay $y_i - ax_i - b$ sẽ có dấu dương hoặc âm tùy theo điểm đó nằm ở trên hay ở dưới đường thẳng. Bình phương của khoảng cách đó bằng $(y_i - ax_i - b)^2$. Theo nguyên tắc cơ bản của phương pháp bình phương nhỏ nhất thì ta chỉ cần chọn a và b sao cho biểu thức

$$(y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n + b)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất có thể được. Như vậy, ta đi tới một bài toán cực tiểu với hai biến a và b. Tuy rằng việc nghiên cứu tỉ mỉ bài toán này không có khó khăn gì đặc biệt, nhưng sẽ không xem xét nó ở đây.

§7. SỰ TỒN TẠI CỰC TRỊ. NGUYÊN LÝ ĐIRICHLÊ

1. Những chú ý chung. Trong một số các bài toán cực trị đã xét, chúng ta đã chứng minh được một cách trực tiếp là lời giải sẽ cho kết quả tốt nhất trong số các khả năng có thể được. Một thí dụ rõ ràng là lời giải bài toán về tam giác của Svarx: thấy ngay được không có tam giác nội tiếp nào có thể có chu vi nhỏ hơn tam giác đường cao. Một số thí dụ loại này có liên quan rõ rệt với các bất đẳng thức đã viết ở đây, chẳng hạn như bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân. Song, khi giải một số bài toán khác, ta lại không đi theo con đường như vậy. Trước hết,

ta giả thiết đã tìm được lời giải, khi phân tích giả thiết đó ta sẽ rút ra được những kết luận có thể cho một đặc trưng đầy đủ của lời giải và giúp ta thực hiện phép dựng tương ứng với đặc trưng đó. Điều đó đã xảy ra với bài toán Stâyne và với lời giải thứ hai của bài toán Svarx. Hai phương pháp đã nêu là khác nhau về mặt logic. Phương pháp thứ nhất được coi là hoàn chỉnh hơn vì nó cho một chứng minh có tính chất kiến thiết về sự đúng đắn của kết quả. Phương pháp thứ hai thì đơn giản hơn nếu căn cứ vào lời giải thứ hai của bài toán Svarx. Nhưng, nó không phải là một chứng minh trực tiếp mà là một chứng minh gián tiếp và chủ yếu là bản thân cấu trúc của nó phải có điều kiện; chẳng hạn như giả thiết về *Sự tồn tại* của lời giải. Nó chỉ dẫn đến kết quả cuối cùng khi sự tồn tại của lời giải được thừa nhận hoặc được chứng minh. Nếu không có tiền đề này thì nó chỉ chứng tỏ nếu lời giải tồn tại thì nó sẽ có những tính chất* như thế.

Do tính có vẻ hiển nhiên của tiền đề về sự tồn tại lời giải, trong suốt thế kỷ qua các nhà toán học đã không chú ý đến tình trạng logic vừa nêu và đã cho sự tồn tại của lời giải các bài toán cực trị là đương nhiên. Một số học giả vĩ đại nhất thế kỷ XIX như Gaux, Đirichlê, Riman đã dựa vào mà không phê phán các giả thiết kiểu đó để chứng minh những mệnh đề sâu sắc và khó chứng minh được bằng cách khác ở trong lĩnh vực vật lý toán và lý thuyết hàm. Ngay sau

---

* Sự cần thiết về mặt logic của chứng minh sự tồn tại cực trị được minh họa bởi nghịch lý sau đây: 1 là số nguyên lớn nhất. Đây là chứng minh của nghịch lý này. Giả thử x là số nguyên lớn nhất. Nếu giả thiết $x > 1$ thì suy ra $x^2 > x$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết đã đề ra. Vậy x phải bằng 1.

khi Riman công bố luận văn tiến sĩ của mình thì nảy sinh cuộc khủng khoảng về cơ sở của lý thuyết hàm biến phức. Tác phẩm vắn tắt này chính là một trong những bước tiến vĩ đại nhất của tư tưởng toán học hiện đại. Trong việc giải thích vấn đề, nó là không chính thống đến nỗi nhiều người xem thường. Lúc này, Vaierstrax đã là một giáo sư nổi tiếng của trường đại học tổng hợp Berlin và được xem là người sáng lập lý thuyết hàm chặt chẽ; với một mối hoài nghi tích cực, ông đã nhanh chóng phát hiện ra một sơ hở về mặt logic mà bản thân tác giả chưa chú ý bổ khuyết. Sự phê bình có tính chất bác bỏ của Vaierstrax đã không làm ảnh hưởng đến lòng tin của Riman vào những kết quả mà mình đã tìm ra được. Trong thời gian dài, lý thuyết của ông không được thừa nhận. Đột nhiên con đường khoa học thần tốc của Riman bị đứt đoạn, ông đã chết vì ho lao. Tư tưởng của ông đã được một số học trò trung thành ủng hộ và tiếp tục phát triển lên. Năm mươi năm sau, Hinbe mới giải đáp đầy đủ tất cả những vấn đề mà Riman còn để lại chưa giải quyết được. Sự phát triển của một lý thuyết toán học thâm nhập sâu sắc vào lĩnh vực vật lý, bắt đầu từ Riman và sau đó được triển khai vào nửa cuối thế kỷ, là một trong những trang chói lọi nhất trong lịch sử toán học hiện đại.

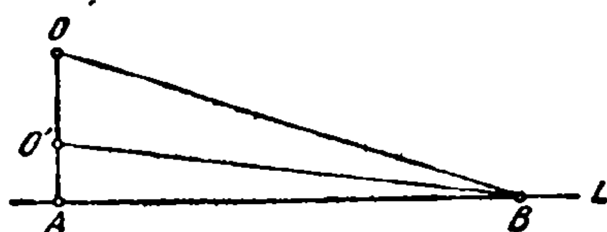
Chỗ yếu trong công trình của Riman là vấn đề tồn tại cực tiểu. Riman đã trình bày lý thuyết của mình trên cơ sở của nguyên lý Đirichlê (ông lấy tên thầy học của mình để gọi nguyên lý đó: Đirichlê đã dùng nguyên lý này trong khi giảng bài ở Gottingen, nhưng không viết về nguyên lý đó trong một công trình nào cả). Ta giả thiết một phần nào đó của mặt phẳng hoặc một mặt tùy ý có phủ một lớp thiếc dát mỏng được nối với điện cực của một nguồn điện tại hai điểm và có một

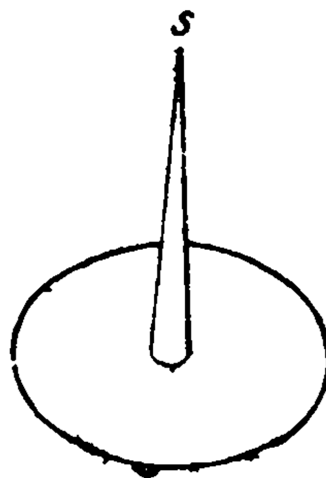
dòng điện ổn định chạy qua. Tất nhiên, một thí nghiệm như vậy sẽ dẫn tới một sự phân phối dòng điện đơn trị xác định nào đó. Nhưng đối với một vấn đề toán học tương ứng — vấn đề đó có giá trị hàng đầu trong lý thuyết hàm và những lĩnh vực khác — thì có gì xảy ra? Trong lý thuyết điện thì hiện tượng vật lý mà ta đang xét được mô tả bởi « một phương trình vi phân đạo hàm riêng với các điều kiện biên ». Đó chính là vấn đề toán học mà ta đề ý đến. Sự có lời giải của nó là có lý với lý do đã giả thiết sự tương đương của nó với một hiện tượng vật lý. Nhưng không thể lấy giả thiết đã nêu làm cơ sở cho một chứng minh toán học về sự có lời giải. Có thể phân biệt hai giai đoạn trong cách giải quyết bài toán mà Riman đã xét. Đầu tiên ông chỉ ra rằng bài toán là tương đương với một bài toán cực tiểu nào đó: cực tiểu hóa một đại lượng nào đó biểu thị năng lượng của dòng điện bằng một dòng nào đó có thực (so với các dòng khác phù hợp với các điều kiện biến đã qui định). Sau đó, ông đưa « nguyên lý Đirichlê » vào như một tiền đề giả thiết rằng bài toán loại này có lời giải. Tuyệt nhiên Riman không tìm ra được một sự có lý toán học nào cho tiền đề này. Đó chính là điểm mà Vaierstrax đã chỉ trích. Không phải chỉ có bản thân sự tồn tại của cực tiểu là không hiển nhiên mà sau này ta còn thấy rằng vấn đề rất tế nhị. Toán học thời ấy còn chưa được chuẩn bị đầy đủ để giải quyết nó mà phải sau vài chục năm nữa nghiên cứu nỗ lực mới đạt tới kết quả cuối cùng.

2. Các thí dụ. Ta minh họa khó khăn đã nảy ra bằng hai thí dụ sau đây:

1. Đánh dấu trên một đường thẳng L hai điểm A và B cách nhau khoảng d và đặt bài toán: Tìm một đường gấp khúc có độ dài ngắn nhất phát xuất từ A vuông góc với L và kết thúc ở B. Vì đoạn thẳng AB ngắn hơn

mọi con đường khác nối các điểm A và B, cho nên có thể chắc chắn mọi con đường chấp nhận được (thỏa mãn các yêu cầu của bài toán) đều có độ dài lớn hơn d. Thật vậy, con đường duy nhất có độ dài d là đoạn thẳng AB nhưng tại điểm A nó không thỏa mãn yêu cầu về phương cho nên không được chấp nhận. Ta xét một con đường chấp nhận được AOB trên H. 222. Nếu thay điểm O bằng điểm O' nằm gần A hơn, ta có một con đường mới chấp nhận được, độ dài của nó khác d nhỏ tùy ý. Nghĩa là, nếu có một con đường chấp nhận được *ngắn nhất* thì độ dài của con đường này không thể lớn hơn d, do đó phải đúng bằng d. Nhưng ta đã thấy rằng con đường duy nhất có độ dài như vậy lại không chấp nhận được. Vậy không có con đường chấp nhận được ngắn nhất. Bài toán không có lời giải.





H.222 — 223. Dùng cho vấn đề về sự tồn tại cực tiểu.

2. Giả thử C là một hình tròn nào đó, S là một điểm nằm ở phía trên tâm của nó cách tâm 1 (H. 223). Ta xét một tập hợp các mặt giới hạn bởi đường tròn C và đi qua điểm S, nhưng nằm « phía trên » hình tròn C (với ý nghĩa là không có hai điểm nào khác nhau của mặt lại có thể chiếu vuông góc thành cùng một điểm

của hình tròn C). Mặt nào trong tập hợp đó có diện tích nhỏ nhất? Câu trả lời khẳng định cho vấn đề này không có: không tồn tại mặt chấp nhận được có diện tích nhỏ nhất. Nếu như bỏ điều kiện đi qua điểm S thì lời giải của bài toán tất nhiên là một đĩa phẳng giới hạn bởi đường tròn C. Ký hiệu diện tích của đĩa này là A. Mọi mặt khác giới hạn bởi đường tròn C phải có diện tích lớn hơn A. Nhưng, có thể chỉ ra một mặt chấp nhận được có diện tích khác A ít bao nhiêu cũng được. Thực vậy, ta chọn một mặt nón có chiều cao bằng 1 sao cho diện tích nhỏ hơn một số khá bé cho trước. Ta đặt mặt này vào giữa dĩa sao cho đỉnh của nó trùng với S. Sau đó xét mặt gồm mặt nón và phần của đĩa ở ngoài đáy hình nón. Rõ ràng mặt được tạo nên bằng cách như vậy khác với bản thân đĩa và gần tâm đĩa, sẽ có diện tích lớn hơn A ít hơn một số cho trước. Vì số này có thể tùy ý nhỏ nên cực tiểu của diện tích (nếu có) phải bằng diện tích A của đĩa.

Trong các mặt giới hạn bởi chu tuyến C thì chỉ có đĩa có diện tích A; song đĩa không đi qua S, nó là mặt không chấp nhận được, do đó, bài toán không có lời giải.

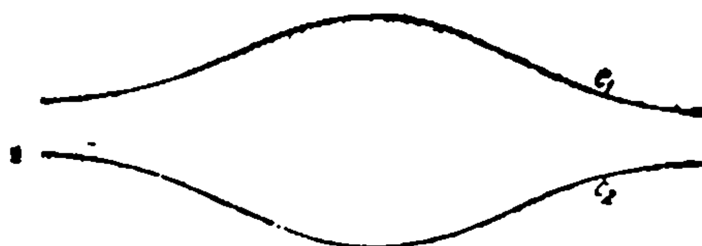
Ta không cần phải dẫn ra nữa những thí dụ tinh tế có tính chất ngụy biện do Vaierstrax chỉ ra. Những thí dụ đã dẫn cũng đủ, chứng tỏ rằng sự tồn tại các cực tiểu không phải là khâu tầm thường trong một chứng minh toán học. Ta hãy nhìn vào vấn đề đang xét với một quan điểm trừu tượng hơn. Ta hình dung một lớp xác định nào đó các sự vật, chẳng hạn những đường cong hoặc những mặt. Giả thử mỗi sự vật của lớp đó được cho tương ứng với một hàm của sự vật đó, như độ dài hoặc diện tích chẳng hạn. Nếu trong lớp chỉ có một số hữu hạn các sự vật thì trong các số tương ứng

tất phải có số lớn nhất và số nhỏ nhất. Nhưng khi trong lớp có vô số các sự vật thì, nếu mọi số tương ứng đều nằm giữa hai cận hữu hạn, không bắt buộc phải có số lớn nhất và số nhỏ nhất. Trên trục số, một tập hợp số được biểu thị bởi một tập hợp điểm. Ta giả thiết mọi số trong tập hợp đó đều dương. Một tập hợp như thế tất phải có « cận dưới » là số a sao cho, trong tập hợp không có số nào nhỏ hơn a và bản thân a hoặc thuộc vào tập hợp hoặc sai khác với một phần tử nào đó của tập hợp một lượng nhỏ tùy ý. Nếu bản thân a thuộc tập hợp thì nó là phần tử nhỏ nhất. Nếu không, tập hợp không chứa phần tử nhỏ nhất. Thí dụ, tập hợp số 1, 1/2, 1/3... không có phần tử nhỏ nhất vì cận dưới 0 không thuộc tập hợp này. Những thí dụ trừu tượng như vậy thể hiện những khó khăn về mặt logic có liên quan đến vấn đề tồn tại. Lời giải toán học của bài toán cực tiểu không thể xem là đầy đủ, nếu không xác định được (dưới dạng tường minh hay ẩn tàng) sự tồn tại phần tử nhỏ nhất trong các phần tử của tập hợp số được xét có liên quan với bài toán.

3. **Các bài toán cực trị có nội dung sơ cấp.** Trong các bài toán có nội dung sơ cấp, muốn giải thích sự tồn tại lời giải chỉ cần phân tích cẩn thận các điều kiện (giả thiết). Trong §5 chương VI, ta đã nghiên cứu khái niệm tổng quát về tập hợp compăc và đã khẳng định rằng một hàm liên tục cho trước trên một tập hợp các phần tử nào đó, tất phải đạt được các cực trị đối với những phần tử ấy của tập hợp, nếu như tập hợp đã cho có tính chất compăc. Trong mỗi bài toán sơ cấp đã nêu ở trên thì các phần tử (các số) đem so sánh với nhau có thể được xem như giá trị hàm của một hoặc nhiều biến ở trong một miền là một tập hợp compăc hoặc có thể làm cho nó trở thành một tập hợp như vậy (nếu như không làm biến đổi bản chất bài toán)

Trong những trường hợp như thế thì sự tồn tại cực trị hoặc cực tiểu không có gì đáng ngờ. Ta dừng lại ở bài toán Stâyne để làm thí dụ. Đại lượng cần xét trong bài toán là tổng của ba khoảng cách, tổng này phụ thuộc liên tục vào vị trí của các điểm. Tuy rằng miền mà điểm di động trong đó là toàn bộ mặt phẳng, không làm giảm tính tổng quát, ta vẽ đường tròn bán kính lớn (gồm toàn bộ hình vẽ) và buộc điểm phải tuân theo điều kiện nằm bên trong đường tròn hoặc nằm trên đường tròn đó. Thực vậy, nếu điểm di động nằm ở khá xa các đỉnh của tam giác thì tổng ba khoảng cách tới các cạnh chắc chắn sẽ vượt quá AB + AC; đại lượng này lại thuộc vào số các giá trị cần so sánh trong hàm số của ta. Như vậy, nếu có cực tiểu cho bài toán « giới nội » (khi điểm chịu một sự hạn chế bổ sung) thì cũng có cực tiểu cho bài toán vô tận. Mặt khác, có thể nhận thấy dễ dàng một tập hợp gồm các điểm ở bên trong hình tròn hoặc ở trên biên của nó là tập hợp compăc. Như vậy, sự tồn tại cực tiểu trong bài toán Stâyne đã được chứng minh. Thí dụ sau đây cho ta thấy rõ tính chất compăc của miền biến thiên của biến độc lập là quan trọng như thế nào. Nếu cho trước hai đường cong kín C_1 và C_2 thì bao giờ cũng có thể tìm được hai điểm P_1 và P_2 tương ứng trên C_1 và C_2 sao cho khoảng cách giữa chúng là cực tiểu và hai điểm Q_1 và Q_2 sao cho khoảng cách giữa chúng là cực đại. Thực vậy, khoảng cách giữa điểm A_1 (trên C_1) và điểm A_2 (trên C_2) là một hàm liên tục cho trên một tập hợp compăc mà các phần tử của nó là cặp điểm A_1, A_2. Nếu các đường cong cho trước không kín mà ra xa vô tận thì bài toán có thể không có lời giải. Trên H. 224 có vẽ hai đường cong như vậy mà khoảng cách giữa hai điểm tương ứng không đạt tới cực đại và cũng không đạt tới cực tiểu. Ở đây, cận dưới của các khoảng cách bằng 0, còn

cận trên là vô tận. Trong những trường hợp khác thì tồn tại cực tiểu nhưng không tồn tại cực đại. Chẳng hạn, đối với hai nhánh của hypebol thì tại các đỉnh A và A', khoảng cách sẽ đạt tới cực tiểu; tuy nhiên, không thể nào chỉ ra hai điểm mà khoảng cách là cực đại.

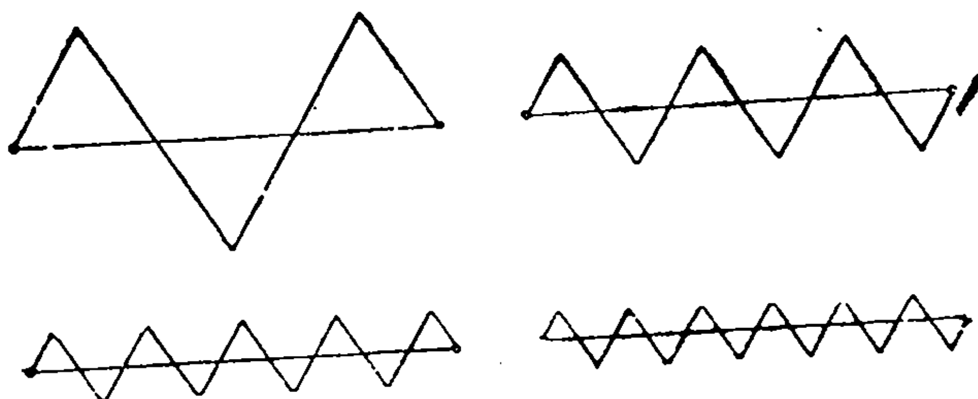


H.224. Các đường cong giữa chúng không có khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất.

Dễ nhận thấy nguyên do của sự khác nhau giữa hai thí dụ trên. Muốn vậy, cần hạn chế miền biến thiên của các biến. Ta lấy một số dương R tùy ý và hạn chế hoành độ các điểm bằng điều kiện $|x| \leqslant R$. Như vậy, sẽ có cực đại và cực tiểu cho cả hai bài toán. Trong trường hợp thứ nhất, đạt được cả cực đại và cực tiểu ở trên biên của miền dù R thế nào. Khi tăng R lên vô hạn thì các điểm tương ứng chạy ra xa vô tận. Trái lại, trong trường hợp thứ hai thì khoảng cách cực tiểu đạt được ở bên trong của miền và các điểm tương ứng là bất động khi R tăng.

4. Khó khăn này ra trong những trường hợp phức tạp hơn. Nếu ta không gặp khó khăn gì đáng kể trong vấn đề về sự tồn tại cực trị trong các bài toán sơ cấp một biến, hai biến hoặc nói chung một số hữu hạn biến thì trong bài toán Đirichlê hoặc ngay trong những bài toán đơn giản hơn tình hình sẽ hoàn toàn khác. Lý do là miền biến thiên của biến độc lập không compắc, hoặc hàm được xét là không liên tục. Trong thí dụ thứ nhất của mục 2 ta có tập hợp các con đường AO'B, trong đó O' dần đến A. Với giả thiết của bài toán thì tất cả những con đường như vậy là chấp nhận được như nhau. Nhưng khi tới giới hạn con đường

AO'C chuyền thành đoạn thẳng AB, bản thân đoạn này lại là một con đường không chấp nhận được. Tập hợp các con đường chấp nhận được trong thí dụ này tương tự như tập hợp số $0 < x \leqslant 1$. Đối với tập hợp số này thì định lý Vaierstrax về cực trị sẽ không có hiệu lực. Vị trí của các sự vật trong thí dụ thứ hai cũng vậy: nếu các hình nón càng ngày càng bẹt hơn thì dãy các mặt tương ứng sẽ chuyền qua giới hạn là đĩa cùng với đường vuông góc dựng đứng lên và tận cùng bởi điểm S. Nhưng hình hình học giới hạn này đã không thể là mặt « chấp nhận được » vì tập hợp các mặt « chấp nhận được » là không compăc.



H.255. Sự xấp xỉ một đoạn thẳng bằng những đường gấp khúc.

Ta xét độ dài một đường cong đề làm thí dụ cho trường hợp hàm không liên tục. Không thể coi độ dài đường cong là hàm của một số hữu hạn biến, bởi vì, về toàn bộ mà xét đường cong không thể được xác định bởi một số hữu hạn « các tọa độ » và sự phụ thuộc của độ dài đường cong với bản thân đường cong không phải là liên tục.

Muốn thấy rõ điều này, cần nối hai điểm A và B cách nhau một khoảng d bởi đường gấp khúc P_n tạo với

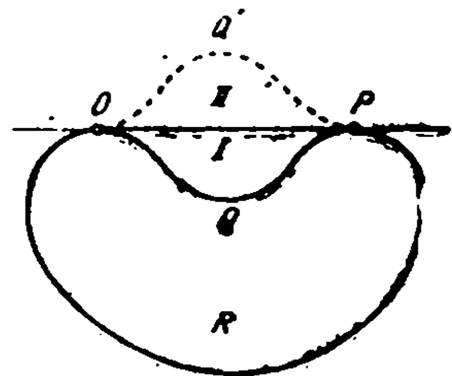
đoạn AB thành n tam giác đều. Từ H.225 ta thấy rõ rằng độ dài P_n với n tùy ý bằng đúng 2d. Bây giờ ta xét dãy các đường gấp khúc P_1, P_2... Các khúc của P_n giảm dần độ cao, số lượng của chúng tăng lên và rõ ràng đường gấp khúc P_n chuyển qua giới hạn thành hai đoạn thẳng AB không còn dấu vết của « đường gấp khúc ». Nhưng độ dài P_n luôn luôn bằng 2d với mọi n, trong khi đó độ dài của đoạn giới hạn AB chỉ bằng d. Bởi thế độ dài đường cong sẽ không phụ thuộc liên tục « vào bản thân đường cong ».

Tất cả các thí dụ đã nêu chứng tỏ phải hết sức dè dặt khi nghiên cứu vấn đề về sự tồn tại lời giải của các bài toán cực trị trong những trường hợp phức tạp.

§8. BÀI TOÁN ĐẲNG CHU

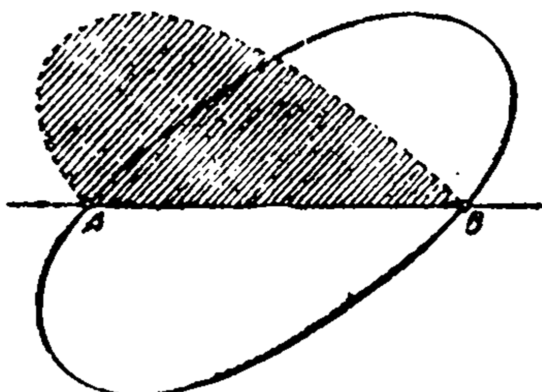
Trong tất cả các đường cong kín có độ dài cho trước, đường tròn bao một phần có diện tích lớn nhất — đó là một trong những sự kiện « hiển nhiên » của toán học mà việc chứng minh chúng một cách chặt chẽ chỉ có thể thực hiện được bằng những phương pháp mới nhất.

Ta bắt đầu từ giả thiết tồn tại lời giải của bài toán. Ta lại giả thiết thêm lời giải là một đường cong C nào đó có độ dài L bao một phần có diện tích cực đại. Dễ chứng minh đường cong C phải lồi, có nghĩa là một đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của C phải nằm trong C. Nếu đường cong C không lồi thì như H. 226 đã chứng tỏ, có thể chỉ ra một đoạn OP mà các điểm mút của nó hoặc nằm trên C hoặc ở ngoài C. Cung OQ'P là đối xứng của cung OQP đối

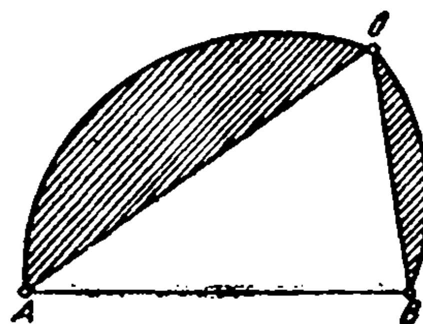


H. 226. Dùng cho chứng minh lời giải bài toán đẳng chu.

với OP sẽ tạo với cung ORP một đường cong có độ dài L. Đường cong này bao một diện tích lớn hơn diện tích bao bởi đường cong C vì nó chứa diện tích phụ I và II. Điều này mâu thuẫn với giả thiết cho rằng đường cong C bao một diện tích lớn nhất. Vậy, đường cong C phải lồi. Bây giờ ta lấy hai điểm A, B bất kỳ chia đường cong C (là lời giải của bài toán) thành hai cung dài bằng nhau. Lúc này đoạn AB sẽ chia miền giới hạn bởi đường cong C thành hai miền tương đương. Thực vậy, nếu diện tích hai miền không bằng nhau thì có thể đối xứng miền có diện tích lớn qua AB (h.227) và có được một đường cong kín có độ dài L bao phần lớn hơn phần diện tích bao bởi đường cong C. Suy ra, mọi đường cong không kín là một nửa (về độ dài) đường cong C là lời giải của bài toán sau đây: Tìm một cung có độ dài L/2 có các mút A và B cùng với đoạn AB bao một diện tích cực đại. Ta chứng minh lời giải của bài toán này là một nửa đường tròn. Giả thử cung AOB là lời giải của bài toán mới. Chỉ cần chứng minh rằng mọi góc nội tiếp, $\widehat{AOB}$ chẳng hạn (h.228), đều vuông, từ đó suy ra cung AOB là nửa đường tròn. Ngược lại, ta giả thiết góc AOB không vuông. Ta thay



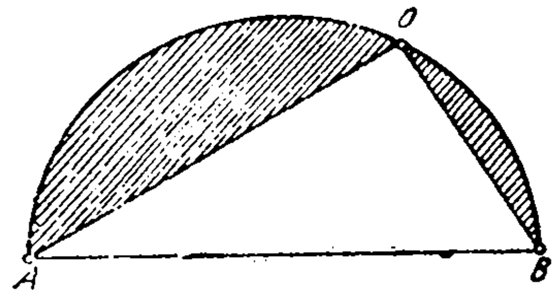
H. 227. Dùng cho chứng minh lời giải của bài toán đẳng chu



H.228. Dùng cho chứng minh lời giải bài toán đẳng chu.

thế tam giác AOB bằng tam giác khác cũng có các cạnh OA, OB nhưng góc xen giữa là 90°, lúc này độ dài cung AOB vẫn như thế (L/2), hình có gạch gạch không thay đổi. Nhưng diện tích tam giác AOB tăng lên vì tam giác có hai cạnh cho trước sẽ có diện tích cực đại khi xen giữa hai cạnh đó là góc vuông. Vậy cung AOB mới (H.229) cùng với đoạn AB sẽ bao một diện tích lớn hơn diện tích ban đầu. Mâu thuẫn này dẫn đến kết luận: Với mọi điểm O trên cung AOB đang xét thì góc AOB phải vuông. Chứng minh đã kết thúc: lời giải của bài toán đẳng chu là đường tròn.

Có thể biểu thị tính đẳng chu của đường tròn dưới dạng bất đẳng thức. Nếu L là độ dài đường tròn thì phần diện tích nó bao là $\frac{L^2}{4\pi}$. Vì thế với mọi đường cong kín phải có bất đẳng thức đẳng chu sau đây liên hệ độ dài của đường C với diện tích A mà nó bao:



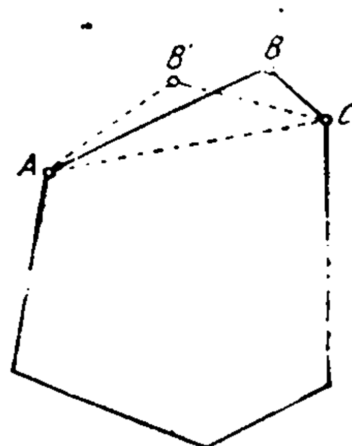
H. 229. Dùng cho chứng minh lời giải bài toán đẳng chu.

$$A \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

Đẳng thức sẽ chỉ xảy ra trong trường hợp C là đường tròn.

* Từ những sự kiện trong § 7, ta thấy rõ chứng minh của Stâyne chỉ có ý nghĩa quy ước: « Nếu đường cong C độ dài L bao một diện tích cực đại thì đường cong đó là đường tròn ». Muốn xác nhận sự đúng đắn của tiền đề đã nêu, cần phải có một lý lẽ khác. Trước hết, ta sẽ chứng minh một định lý có nội dung sơ cấp: Trong tất cả các đa giác kín P với số chẵn cạnh 2n và có chu vi cho trước, thì đa giác đều 2n

cạnh có diện tích lớn nhất. Chứng minh cũng được tiến hành theo mẫu của chứng minh Stâyne đã nêu ở trên nhưng có những thay đổi sau: Vấn đề tồn tại lời giải ở đây không gây nên khó khăn gì. Chu vi và diện tích của đa giác 2n — cạnh phụ thuộc liên tục vào 4n tọa độ các đỉnh của nó và không hạn chế tính tổng quát, có thể làm cho miền biến thiên của những tọa độ này (trong không gian 4n — chiều) trở nên compăc. Như vậy ta có thể bắt đầu từ khẳng định một đa giác 2n — cạnh P nào đó là lời giải của bài toán đang xét, rồi phân tích tính chất của nó. Cũng như trong chứng minh của Stâyne ta chứng minh P là đa giác lồi. Sau đó ta chứng minh tất cả 2n cạnh bằng nhau. Ngược lại, giả sử hai cạnh kề AB và BC có độ dài khác nhau; khi đó có thể cắt tam giác ABC ra khỏi đa giác P và thay nó bằng tam giác cân AB'C với AB' = B'C + BC và có diện tích lớn hơn (xem § 1). Lúc này ta có đa giác P' có cùng chu vi nhưng có diện tích lớn hơn diện tích đã giả thiết. Vậy mọi cạnh của P phải bằng nhau. Còn phải chứng minh đa giác P là đa giác đều. Muốn vậy, chỉ cần chứng minh P nội tiếp được trong một đường tròn. Chứng minh được tiến hành tiếp tục như chứng minh của Stâyne. Trước hết ta xác nhận rằng mọi đường chéo nối các đỉnh đối diện sẽ chia diện tích thành hai phần bằng nhau. Sau đó, ta chứng minh tất cả các đỉnh của một trong những đa giác tạo ra được khi cắt theo các đường chéo đều nằm trên cùng một đường tròn. Đề nghị bạn đọc thực hiện tỉ mỉ các chứng minh đó để luyện tập.



H. 230. Dùng cho chứng minh lời giải của bài toán đẳng chu...

Sự tồn tại lời giải của một bài toán đẳng chu sẽ được chứng minh nhờ chuyển qua giới hạn: khi tăng vô hạn số cạnh 2n của đa giác P nó chuyển qua giới hạn là đường tròn. Tất nhiên sự chuyển qua giới hạn này cũng sẽ cho ta bản thân lời giải.

Lập luận của Stâyne không thuận tiện cho chứng minh tính đẳng chu của hình cầu trong không gian ba chiều. Chính Stâyne đã nêu ra một cách giải khác phức tạp hơn cho bài toán này và dùng được trong trường hợp ba chiều. Ta sẽ không trình bày ở đây vì dựa vào cách giải đó ta không chứng minh được sự tồn tại của lời giải. Nhìn chung, chứng minh tính đẳng chu của hình cầu khó hơn nhiều so với chứng minh tính chất này của đường tròn. Sau này G.A. Svarx đã trình bày đầy đủ và khá chặt chẽ chứng minh này trong một tác phẩm khó đọc. Tính chất vừa nêu được biểu thị dưới dạng bất đẳng thức

$$36\pi V^2 \leqslant A^2$$

trong đó A là diện tích mặt kín, V là thể tích mà nó bao; đẳng thức chỉ xảy ra đối với mặt cầu.

§9. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Sự liên hệ giữa bài toán Stâyne và bài toán đẳng chu.

Lời giải các bài toán cực trị sẽ có những nét riêng nếu miền các giá trị của biến phụ thuộc những điều kiện biên. Định lý Vaierstrax (khẳng định trong miền compăc thì một hàm liên tục sẽ nhận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất) không loại trừ khả năng là những giá trị này sẽ đạt tới cực trị ở trên biên của miền. Có thể dùng hàm $u = x$ làm một thí dụ đơn giản, tầm thường. Nếu x biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$ và không bị hạn chế gì thì miền B của biến độc lập là toàn bộ trục thực. Từ đó dễ hiểu hàm $u = x$ không có giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất. Nhưng nếu miền B giới nội bằng bất đẳng thức $0 \leqslant x \leqslant 1$ chẳng hạn, hàm đó sẽ có giá trị lớn nhất là 1 tại mút phải của đoạn và có giá trị nhỏ nhất là 0 tại mút trái. Nhưng những cực trị này sẽ không tương ứng với « đỉnh » hoặc các « thung lũng » của đồ thị hàm số đang xét. Nói cách khác, đó là những cực trị của các lân cận không có « hai phía ». Nằm tại các đầu mút của một đoạn, chúng sẽ di động khi mở khoảng đang xét. Nếu đề cập đến « đỉnh » hoặc « thung lũng » thực sự của đường cong thì tính chất cực trị sẽ thuộc về một lân cận đầy đủ của điểm đang xét. Những di chuyển không lớn của biên không ảnh hưởng đến cực trị. Thậm chí loại cực trị này còn được bảo toàn khi biến thay đổi tùy ý trong toàn bộ miền B hoặc ít nhất trong một lân cận đủ nhỏ nào đó của một điểm. Cần làm rõ sự khác biệt giữa cực trị « tự do » và cực trị « biên » trong những tình huống khác nhau. Đối với hàm một biến thì sự khác biệt có liên hệ chặt chẽ với tính đơn điệu hoặc không đơn điệu của hàm, vì thế không có gì cần lưu ý đặc biệt. Nhưng đối với hàm nhiều biến thì cần chú ý nhiều hơn đến các điều kiện đạt cực trị trên biên của một miền.

Chẳng hạn, ta hãy xét bài toán Svarx về tam giác. Ở đây, miền biến thiên của ba biến độc lập gồm bộ ba điểm P, Q, R nằm trên các cạnh tương ứng của tam giác ABC. Lời giải của bài toán mang tính chất loại trừ: hoặc đạt tới cực tiểu với điều kiện mỗi điểm P, Q, R chuyển động độc lập với nhau nằm trên các cạnh tương ứng của tam giác (lúc này lời giải là tam giác đường cao), hoặc đạt tới cực tiểu « ở trên biên » nếu hai điểm nào đó trong ba điểm P, Q, R trùng với đầu mút chung của hai cạnh kề (lúc này « tam giác » cực

tiểu chính là hai lần đường cao của tam giác đã cho). Đặc tính của lời giải tùy thuộc ở khả năng nào trong hai khả năng đó sẽ xảy ra.

Trong bài toán Stâyne về ba « làng » thì miền biến thiên của điểm P là toàn bộ mặt phẳng mà ba điểm A, B, C cho trước có thể được coi là các biên. Có thể có hai khả năng làm cho lời giải khác nhau về cơ bản: hoặc đạt tới cực tiểu ở bên trong tam giác ABC (lúc này có ba góc bằng nhau đỉnh P) hoặc đạt tới cực tiểu tại một đỉnh — một trong các điểm biên của miền biến thiên. Đối với bài toán bổ sung cũng có những khả năng loại trừ nhau tương tự.

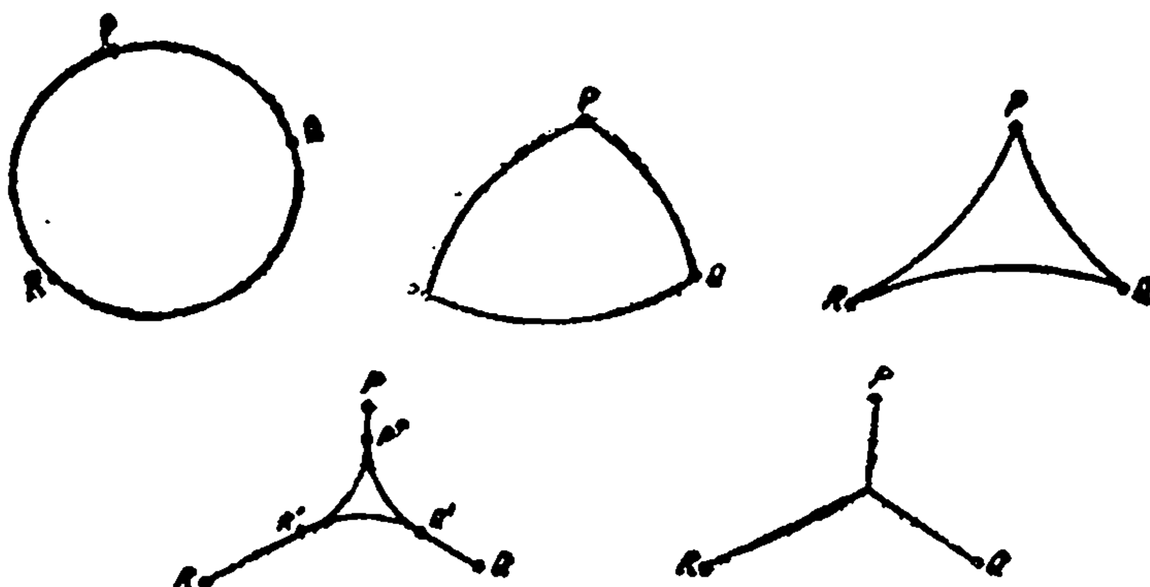
Cuối cùng, ta xét một bài toán đẳng chu với các điều kiện biên. Trong thí dụ này ta sẽ xác lập mối liên hệ đặc biệt giữa bài toán đẳng chu và bài toán Stâyne và đồng thời, ta sẽ gặp một thí dụ đơn giản nhất về bài toán cực trị loại mới. Trong bài toán đẳng chu ban đầu thì đường cong kín có độ dài cho trước đóng vai biến độc lập, có thể biến dạng tùy ý khác với đường tròn. Đồng thời, mọi đường cong thu được bất kỳ đều là đường cong « chấp nhận được ». Như vậy, đường tròn sẽ cho ta một cực tiểu tự do thực sự. Bài toán được cải biên có yêu cầu bổ sung sau đây: Những đường cong C chấp nhận được phải bao trong chúng những điểm P, Q, R cho trước (hoặc phải đi qua ba điểm đó). Cũng như bài toán trước, diện tích A được coi là cho trước, cần phải cực tiểu hóa độ dài L. Trong trường hợp này, ta có điều kiện « biên » theo đúng nghĩa của từ đó.

Rõ ràng, khi A đủ lớn, ba điểm P, Q, R không có ảnh hưởng gì đến lời giải của bài toán. Thực vậy, nếu A lớn hơn (hoặc bằng) diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác PQR thì lời giải chính là đường tròn chứa các điểm đó. Điều gì sẽ xảy ra trong trường hợp ngược

lại. Ta chỉ nêu kết quả mà không chứng minh dù rằng chứng minh là hoàn toàn sơ cấp. Ta sẽ xác định lời giải của bài toán với giả thiết A nhỏ dần và cuối cùng dần tới 0. Nếu A nhỏ hơn diện tích hình tròn ngoại tiếp thì đường tròn đẳng chu sẽ trở thành ba cung tròn có cùng bán kính tạo thành một tam giác lồi có các đỉnh P, Q, R (H.232). Tam giác này là lời giải của bài toán, nó được xác định hoàn toàn bởi giá trị bằng số của A. Khi A giảm, bán kính của cung sẽ tăng lên và cũng được kéo thẳng ra. Khi A bằng diện tích của tam giác PQR thì lời giải là bản thân tam giác đó. Nếu A nhỏ đi nữa thì một lần nữa ta lại được tam giác gồm ba cung cùng bán kính nhưng phần lồi chuyển vào trong tam giác mà các đỉnh hay nói đúng hơn các « vòi » của nó là P, Q, R (H.233). Nếu tiếp tục giảm A thì sẽ đến lúc hai cung tròn chắp nối nhau tại một điểm nào đó R và sẽ tiếp xúc với nhau. Nếu tiếp tục thì sẽ không còn các tam giác như vậy nữa, lúc này sẽ xuất hiện một hiện tượng mới : lời giải sẽ là một tam giác lõm gồm ba cung, nhưng một « vòi » R' của nó sẽ tách khỏi điểm R, lúc này lời giải là tam giác cong PQR' cùng với đoạn thẳng RR' « được tính hai lần ». Đoạn này tiếp xúc với hai cung tròn chắp nối nhau ở điểm R'. Khi A giảm đi nữa thì « các vòi » sẽ tách ra ở các đỉnh khác nhau. Khi A dương đủ nhỏ ta sẽ có một tam giác đều gồm ba cung tròn cùng với các đoạn P'P, Q'Q, R'R (H.234) « được tính hai lần ». Cuối cùng, khi A dần tới 0 thì tam giác nói trên trở thành một điểm. Như vậy, lời giải của bài toán Stâyne là trường hợp tới hạn của bài toán đẳng chu mở rộng (theo phương pháp nêu trên).

Nếu P, Q, R lập thành một tam giác tù có góc 120° hoặc lớn hơn thì khi A dần tới 0, ta cũng có lời giải của bài toán Stâyne, bởi vì rút cục các cung tròn sẽ

đỉnh liền với các cạnh của góc tù. Tương tự, bằng cách cho bài toán đẳng chu qua giới hạn, cũng có thể thu được lời giải của bài toán Stâyne mở rộng (xem H. 216 — 218)

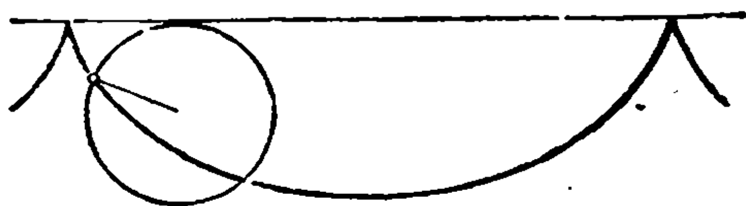


H.231 — 235. Các hình đẳng chu cho lời giải của bài toán Stâyne khi tới giới hạn.

§10. PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN

1. Mở đầu. Bài toán đẳng chu là một thí dụ cổ nhất trong một lớp rộng lớn các bài toán quan trọng đã được Iôhen Becnuli chú ý đến từ năm 1696 trong « Acta Eruditorum » một tạp chí khoa học xuất sắc thời đó. Ông đã đề ra bài toán « về đường đẳng thời » sau đây. Một phần tử vật chất trượt không ma sát theo một đường cong nối một điểm A nằm phía trên với một điểm B nằm phía dưới. Giả thiết không có lực nào tác dụng lên phần tử, ngoài trọng lực. Cần xác định xem đường cong C phải thế nào để thời gian đi từ A xuống B là nhỏ nhất. Dễ nhận thấy thời gian cần đi từ A đến B phụ thuộc vào việc lựa chọn con đường. Đoạn thẳng sẽ không bảo đảm cho thời gian nhỏ nhất, đối với các

cung tròn hoặc các đường cong sơ cấp khác cũng vậy. Becnuli tuyên bố rằng ông đã có được lời giải lý thú cho bài toán đặt ra, nhưng chưa muốn công bố lời giải đó vì còn muốn các nhà toán học lớn nhất thời bấy giờ tập trung sức vào các bài toán mới. Đặc biệt, ông đã thách thức với người anh cả Iacôp của mình, người mà ông đã có quan hệ thù địch rõ ràng và đã mệnh danh công khai là người vô học. Tính chất đặc biệt của các bài toán về đường đẳng thời đã được thế giới toán học nhanh chóng đánh giá cao. Trước đó, những bài toán đề cập đến vấn đề cực tiểu hóa một đại lượng phụ thuộc một hoặc nhiều (hữu hạn) biến bằng số đã được nghiên cứu nhờ phép tính vi phân. Trong bài toán này, đại lượng được xét — thời gian đi xuống — phụ thuộc vào toàn bộ đường cong, đây là chỗ khác biệt quan trọng. Vì lẽ đó, bài toán về đường đẳng thời không thể giải được bằng phương pháp vi phân hoặc một phương pháp nào khác đã biết trong thời gian đó.



H.336. Xyclôid.

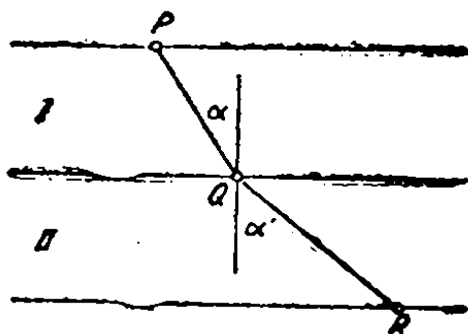
Cái mới trong bài toán đặt ra (chắc hẳn, thời đó người ta chưa nhận thức được chứng minh tính chất đẳng chu của hình tròn cũng là vấn đề có bản chất như vậy) đã thu hút những người cùng thời với Becnuli, nhất là khi đã thấy rằng lời giải của bài toán là đường Xyclôid, một đường cong mới được phát hiện cách đó không lâu (nhắc lại định nghĩa Xyclôid: là quĩ đạo chuyển động của một điểm nằm trên một đường tròn lăn nhưng không trượt trên một đường thẳng (H.236). Trước đây, đường cong này đã có liên quan đến những bài toán lý thú có nội dung cơ học, đặc biệt với việc chế tạo

con lắc lý tưởng). Huygenx đã chứng minh rằng nếu vật nặng (điểm) thực hiện một chuyển động dao động (không ma sát, dưới tác dụng của trọng lực) theo một Xyclôid nằm trong mặt phẳng thẳng đứng thì chu kỳ dao động không phụ thuộc vào biên độ. Trái lại, trên một cung tròn là quĩ đạo chuyển động của con lắc thông thường thì sự độc lập như vậy chỉ có tính chất gần đúng. Trong trường hợp này ta thấy cung tròn không thích hợp cho việc chế tạo các đồng hồ chính xác. Do đó mà Xyclôid còn có tên gọi là đường đẳng thời.

2. Phép tính biến phân — nguyên lý Fecma trong quang học. Trong số những phương pháp khác nhau để giải bài toán đẳng thời của anh em Becnuli và của các học giả khác, ta chọn để trình bày ở đây một trong những phương pháp cổ nhất xét về mặt lịch sử. Những phương pháp đầu tiên có tính chất chuyên biệt ở mức độ nào đó, chúng phù hợp hơn với các bài toán riêng. Nhưng ngay sau đó Ơle và Lagrăng (1736 — 1813) đã tìm ra những phương pháp tổng quát hơn để giải các bài toán cực trị mà các yếu tố độc lập không những chỉ là một hoặc nhiều (hữu hạn) các biến bằng số mà còn là một đường cong hoặc một hàm xét trong toàn bộ hoặc thậm chí một hệ thống các đường cong (các hàm). Phương pháp mới để giải các bài toán loại này có tên gọi là *phép tính biến thuộc.*

Không thể trình bày ở đây ngành toán học này về phương diện kỹ thuật của nó cũng như phân tích sâu sắc những bài toán riêng biệt thuộc loại này. Phép tính biến phân có nhiều ứng dụng trong các lý thuyết vật lý. Từ lâu, người ta đã nhận thấy các hiện tượng thiên nhiên thường tuân theo những nguyên lý cực trị nào đó. Như ta đã thấy, Hêrôn đã nhận ra sự phản xạ của tia sáng

trên gương phẳng được mô tả đầy đủ dựa trên nguyên lý cực tiểu. Ngay trong thế kỷ XVII, sau khi nhận thấy định luật khúc xạ ánh sáng cũng được biểu thị một cách tuyệt đẹp bằng ngôn ngữ của nguyên lý cực tiểu, Fecma đã làm như sau: ta biết rất rõ rằng khi tia sáng đi từ một môi trường đồng chất này qua một môi trường đồng chất khác thì đường đi của nó sẽ thay đổi phương. Chẳng hạn, một tia sáng đi từ điểm P (H. 237) ở trong môi trường bên trên có vận tốc v tới điểm R ở trong môi trường bên dưới có vận tốc w sẽ đi theo đường gấp khúc PQR. Xneliux (1591 — 1626) đã phát biểu một định luật mà ông rút ra được từ thực nghiệm, theo định luật này thì đường đi gồm hai đoạn thẳng PQ và QR tạo với pháp tuyến các góc α và α' sao cho $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v}{w}$. Nhờ phép tính vi phân, Fecma đã xác nhận đường đi này có tính chất là thời gian để tia sáng đi từ P đến R là cực tiểu, tức là nhỏ hơn thời gian cần để đi theo một con đường bất kỳ nào khác từ P đến R. Vậy là, sau mười sáu thế kỷ định luật phản xạ ánh sáng của Hêrôn mới được bổ sung bởi định luật khúc xạ ánh sáng tương tự với nó và cũng có tầm quan trọng như vậy.



H. 237. Sự khúc xạ của tia sáng

Fecma đã khái quát định luật này cho trường hợp các mặt cong ngăn cách giữa hai môi trường, chẳng hạn như mặt cầu của những thấu kính. Trong trường hợp này có lẽ tia sáng cũng đi theo con đường mà thời gian cần đi nhỏ hơn một con đường bất kỳ khác. Cuối cùng, Fecma đã xét một hệ quang học bất kỳ trong

đó vận tốc ánh sáng thay đổi từ điểm này tới điểm khác theo một qui luật xác định, chẳng hạn như trong khí quyển. Ông đã phân chia một môi trường không đồng chất liên tục thành những lớp mỏng mà trong mỗi lớp như thế thì vận tốc ánh sáng gần như không đổi và coi nó như là một môi trường mới — một môi trường tưởng tượng trong đó vận tốc ánh sáng thực sự không đổi trong phạm vi mỗi lớp. Trong những điều kiện như vậy, ta có thể áp dụng nguyên lý trên khi chuyển từ mỗi lớp đến lớp tiếp sau. Sau đó, với giả thiết bề dày mỗi lớp dần tới 0, ta có *nguyên lý tổng quát của quang hình học* (ngày nay có tên là nguyên lý Fecma): Trong một môi trường không đồng chất, tia sáng đi từ điểm này tới điểm khác theo một con đường sao cho thời gian cần thiết là nhỏ hơn khi nó đi theo một con đường bất kỳ nào khác. Nguyên lý này rất có ích không những về mặt lý thuyết mà còn về mặt thực tiễn. Trong quang hình học, khi thực hiện công cụ kỹ thuật của phép tính biến phân, nguyên lý này được sử dụng như vũ khí cơ bản để tính toán các hệ thống thấu kính.

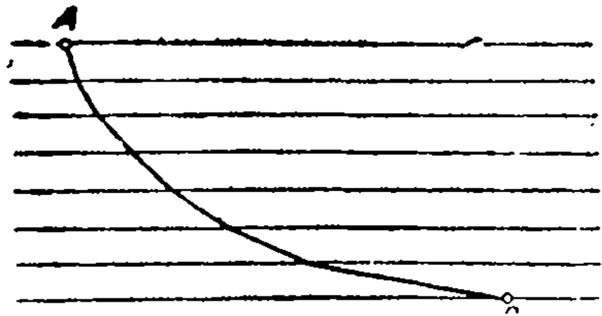
Sau đấy, những nguyên lý cực tiểu đã trở nên những nguyên lý thống trị trong nhiều lĩnh vực khác nữa của vật lý. Chẳng hạn, người ta đã nhận thấy sự cân bằng bền của một hệ thống cơ học sẽ đạt được trong một sự sắp đặt để cho « thế năng » là cực tiểu. Thí dụ, ta xét một dây xích đồng chất uốn cong được tùy ý, bị treo ở hai đầu và chịu tác dụng của trọng lực. Khi đó, dây xích sẽ có một vị trí mà thế năng của nó là nhỏ nhất. Trong trường hợp này, thế năng phụ thuộc vào độ cao của trọng tâm so với một trục không đổi nào đó. Đường cong tạo nên bởi dây xích treo tự do được gọi là *đường dây xích* mà hình dạng có phần nào giống Parabol.

Không phải chỉ có định luật cân bằng mà định luật chuyển động cũng tuân theo các nguyên lý cực trị. Lần đầu tiên Ơle đã nảy ra những quan niệm rõ ràng về những nguyên lý này, khi mà những người có xu hướng thiên về tư duy tư biện mang tính chất triết học và thần bí như Môpectin (1698 — 1759) chẳng hạn, đã không diễn đạt được về mặt toán học chính xác vì bị hạn chế ở những ý kiến mơ hồ về vấn đề « sự điều chỉnh thần bí các hiện tượng vật lý bởi những nguyên lý tổng quát của sự hoàn thiện tối cao ». Các nguyên lý biến phân của Ơle trong lĩnh vực vật lý đã được nhà toán học người Irland Hamingtôn (1805 — 1865) phát hiện lại và mở rộng thêm. Sau này chúng đã trở thành công cụ mạnh trong những lĩnh vực như cơ học, quang học, điện học và các ngành khoa học kỹ thuật khác nhau. Các lý thuyết vật lý mới — lý thuyết tương đối và lý thuyết lượng tử – cũng là những thí dụ thể hiện đầy đủ giá trị các phương pháp của phép tính biến phân.

3. Lời giải bài toán về đường đẳng thời của Iacôp Becnuli

Phương pháp đầu tiên được áp dụng để giải bài toán về đường đẳng thời của Iacôp Becnuli có thể trình bày được với những phương tiện toán học tương đối đơn giản. Ta chọn một sự kiện đã biết trong cơ học làm căn cứ, đó là sự kiện một phần tử vật chất bắt đầu đi từ điểm A với vận tốc O và trượt xuống dưới theo một đường cong bất kỳ C đến một điểm P nào đó với vận tốc tỉ lệ với đại lượng $\sqrt{h}$, trong đó h là khoảng cách (tính theo phương thẳng đứng) từ P đến điểm A. Nói cách khác, ta có hệ thức $v = c\sqrt{h}$,

trong đó c là hệ số hằng số. Ta biến đổi bài toán đang xét một chút. Ta phân chia bằng tưởng tượng không gian thành một tập hợp các lớp nằm ngang, mỗi lớp có bề dày d và giả thiết vận tốc của phần tử biến đổi không liên tục mà có những bước nhảy không lớn khi chuyển từ lớp này sang lớp kia; tức là trong lớp thứ nhất trực tiếp chứa điểm A vận tốc bằng $c\sqrt{d}$, trong lớp thứ hai vận tốc là $c\sqrt{2d}$, cuối cùng trong lớp thứ n là $c\sqrt{nd} = c\sqrt{h}$, trong đó h là khoảng cách từ P đến A tính theo phương thẳng đứng (H. 238). Trường hợp này, bài toán của chúng ta có số biến hữu hạn. Trong phạm vi mỗi lớp, đường đi của phần tử phải là đường thẳng. Không có vấn đề tồn tại cực trị, lời giải phải là đường gấp khúc, chỉ cần xác định các góc ở đỉnh của nó. Theo nguyên lý cực tiểu của sự khúc xạ đơn giản ở trong mỗi cặp lớp kề nhau, chuyển động từ P đến R qua Q phải sao cho nếu cố định P và R thì điểm Q sẽ tương ứng với thời gian nhỏ nhất. Từ đó suy ra « định luật khúc xạ » sau đây:



H.238. Dùng cho bài toán đường đẳng thời

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{nd}} = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{(n+1)d}}$$

Lặp lại lập luận này, ta được một dãy đẳng thức

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{d}} = \frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{2d}} = \dots \qquad (1)$$

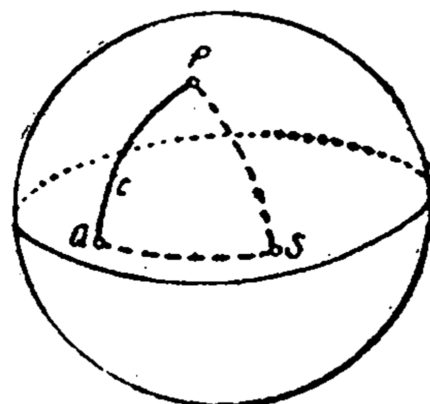
trong đó α_n là góc giữa phương của đường đi trong lớp thứ n và phương thẳng đứng.

Sau đó, Becnuli giả thiết bề dày của lớp dần vô hạn tới 0, đường gấp khúc lời giải của bài toán gần đúng sẽ tới giới hạn là đường cong phải tìm cho bài toán cơ bản. Trong khi qua giới hạn, các đẳng thức[1] vẫn được bảo toàn, vì thế Becnuli rút ra kết luận: nếu α là góc mà đường cong quĩ đạo C của chuyển động đẳng thời làm với phương thẳng đứng tại một điểm P tùy ý, h là khoảng cách từ A đến P theo phương thẳng đứng thì biểu thức $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{h}}$ phải giữ giá trị không đổi tại tất cả các điểm P của đường cong C. Dễ dàng chứng tỏ rằng Xyclòid có tính chất như thế.

Chứng minh của Becnuli là một mẫu mực của lập luận toán học độc đáo và có hiệu quả, nhưng không thể coi là một lập luận chặt chẽ không có gì chê trách. Trong lập luận có một số giả thiết được thừa nhận một cách không tường minh mà sự xác minh tính đúng đắn của chúng lại phức tạp hơn và rộng hơn bản thân lập luận. Một mặt thì sự tồn tại của lời giải C không được chứng minh, mặt khác chưa có cơ sở toán học đầy đủ để chứng tỏ lời giải của bài toán gần đúng là lời giải gần đúng của bài toán cơ bản. Vấn đề về giá trị nội tại của các kiến trúc oristic như vậy cần được xem xét tỉ mỉ, nhưng nó sẽ đưa chúng ta đi quá xa.

4. Các đường địa vật lý trên mặt cầu. Các minimax. Trong phần mở đầu chương này, ta đã nhắc đến vấn đề tìm « các đường địa vật lý » — những cung ngắn nhất nối hai điểm cho trước ở trên một mặt cầu nào đó. Như đã chứng minh trong hình học sơ cấp, những đường như vậy sẽ là cung của những đường tròn lớn. Giả thử P và Q là hai điểm trên mặt cầu (không xuyên tâm đối với nhau) và C là cung nhỏ trong hai cung của đường tròn lớn đi qua P và Q. Ở đây có vấn đề:

Cung lớn hơn C' của cũng đường tròn đó là cái gì? Tất nhiên, nó không cho ta cực tiểu của khoảng cách giữa hai điểm P và Q, nhưng nó cũng không cho cực đại vì dễ thấy có thể vẽ trên mặt cầu những cung có độ dài tùy ý nối hai điểm cho trước. Hình như so với bài toán đang xét cung C' là minimax, là « điểm yên ngựa ». Ta hình dung một điểm tùy ý biến thiên S và đề ra bài toán tìm con đường ngắn nhất từ P đến Q đi qua S. Tất nhiên trong tình huống như vậy của bài toán thì khoảng cách cực tiểu là cung « gấp khúc » gồm hai cung PS và SQ của các đường tròn lớn. Sau đó ta sẽ gắng tìm một vị trí nào đó của điểm S, trong đó khoảng cách nhỏ nhất PSQ là cực đại. Khi đó ta có lời giải sau đây của bài toán: điểm S phải là điểm sao cho đường gấp khúc PSQ là cung lớn C' của đường tròn lớn PQ. Có thể biến đổi bài toán bằng cách ngay từ đầu ta đặt vấn đề về con đường ngắn nhất trên mặt cầu từ điểm P đến điểm Q, đi qua n điểm cho trước S_1, S_2,..., S_n, sau đó xác định các điểm S_1, S_2..., S_n sao cho độ dài cực tiểu là lớn nhất có thể được. Lời giải của bài toán này là con đường đi theo đường tròn lớn từ P đến Q rồi cuộn xung quanh mặt cầu và đi qua những điểm đối tâm với P và Q đúng n lần.



H. 239. Các đường địa vật lý trên mặt cầu

Bài toán Minimax là một thí dụ điển hình của một lớp rộng lớn các vấn đề trong phạm vi phép tính biến phân đã được nghiên cứu thành công trong thời gian gần đây nhờ những phương pháp do Morx và các tác giả khác đề ra.

§ 11. CÁC LỜI GIẢI BẰNG THỰC NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CỰC TIỂU. THÍ NGHIỆM VỚI MÀNG XÀ PHÒNG

1. Mở đầu. Thường thường thì việc giải một bài toán biến phân nhờ các công thức hoặc các phép dựng hình học gồm những yếu tố đơn giản đã biết là rất khó, thậm chí có thể không giải được. Thay thế cho điều đó người ta thường bằng lòng với việc chứng minh sự tồn tại lời giải trong những điều kiện nào đó rồi nghiên cứu những tính chất của nó. Trong nhiều trường hợp, nếu chứng minh tồn tại có khó khăn nhất định, nên thực hiện các giả thiết toán học của bài toán bằng những thiết bị vật lý tương ứng, xem bài toán toán học đã cho tương đương với một bài toán vật lý nào đó. Trong những trường hợp như vậy, bản thân hiện tượng vật lý sẽ cho lời giải của bài toán toán học. Tất nhiên, một qui trình như vậy không phải là một chứng minh toán học đầy đủ mà chỉ là một quá trình tìm tòi. Thực vậy, ở đây còn có vấn đề chưa được giải quyết: hiện tượng vật lý có tương đương thật sự với thể hiện toán học hay không, hay nó chỉ cho một sự phản ánh không đầy đủ của thực tại. Đôi khi những thực nghiệm ở đây đã có tác dụng thuyết phục đối với các nhà toán học, dù rằng chúng chỉ là những thực nghiệm tưởng tượng. Trong thế kỷ qua, một loạt các định lý cơ sở trong phạm vi lý thuyết hàm đã được Riman phát hiện ra dựa trên những thực nghiệm đơn giản nhất về dòng điện trong những lá kim loại. Về sau này ta sẽ xét trên cơ sở thực nghiệm — chứng minh một trong những bài toán biến phân sâu sắc hơn. Ta đề cập đến bài toán Platô. *Platô* (1801 — 1883) là một nhà vật lý nổi tiếng người Bỉ đã làm những thí nghiệm lý thú có quan hệ gần gũi nhất với bài toán đó. Bản thân bài toán đã khá cổ thuộc vào thời kỳ

phát sinh phép tính biến phân. Dưới hình thức diễn đạt đơn giản nhất thì nội dung của bài toán là như sau: Tìm mặt có diện tích nhỏ nhất giới hạn bởi một chu tuyến không gian đóng. Ta cũng sẽ xem xét những thực nghiệm thuộc vào một số bài toán gần gũi nào đó và sẽ chứng tỏ rằng điều này cho phép ta nhận thấy dưới một quan điểm mới một số bài toán cực trị đã nêu ở trên cũng như một loạt các bài toán cực trị mới.

2. Thí nghiệm với màng xà phòng

Về mặt toán học thì bài toán Platô qui về việc giải « một phương trình vi phân đạo hàm riêng » hoặc một hệ những phương trình như vậy. Ơle đã xác nhận rằng mọi mặt « cực tiểu » là lời giải của bài toán đó nếu không phải là mặt phẳng thì tất phải « có hình yên ngựa » tại mọi điểm của nó và độ cong trung bình của nó phải bằng 0 ở hầu khắp nơi*. Trong vòng một thế kỷ qua người ta đã tìm được lời giải cho một số trường hợp riêng, nhưng sự tồn tại lời giải trong trường hợp tổng quát chỉ mới được Đuglax và Rađô chứng minh cách đây không lâu.

Các thí nghiệm của Platô đã trực tiếp cho các lời giải vật lý của những chu tuyến rất khác nhau. Nếu một chu tuyến đóng làm bằng dây kim loại nhúng được vào chất lỏng có sức căng mặt ngoài yếu rồi nhấc lên

---

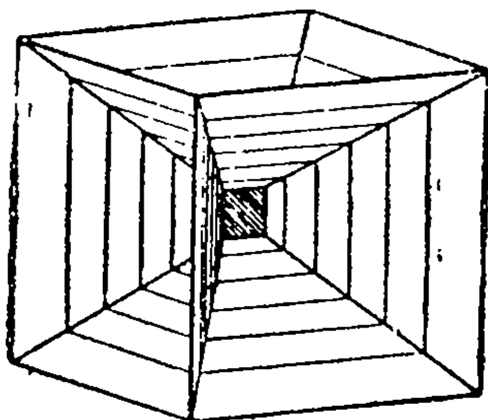
* Độ cong trung bình của một mặt tại điểm P được xác định như sau: Ta hình dung một đường vuông góc với mặt ở điểm P và mọi mặt phẳng đi qua đường đó. Những mặt phẳng này cắt mặt đã cho theo những đường cong nói chung có độ cong khác nhau ở điểm P. Nói riêng, ta xét những đường cong có độ cong lớn nhất và nhỏ nhất (có thể chứng minh chúng tương ứng với những mặt phẳng vuông góc với nhau) Nửa tổng của hai độ cong đó là độ cong trung bình của mặt tại điểm P.

thì ta thấy một màng mỏng bám trên chu tuyến dưới dạng một mặt cực tiểu có diện tích nhỏ nhất (với giả thiết có thể bỏ qua trọng lực và những lực khác ngăn cản không cho màng đạt tới cân bằng bền: sự cân bằng này xảy ra trong trường hợp diện tích của màng là nhỏ nhất vì thế năng sinh ra do sức căng mặt ngoài trong điều kiện đó là cực tiểu). Đây là đơn pha chế tốt để có chất lỏng như vậy: hòa tan 10g ôlêat natri khô nguyên chất trong 500g nước cất, sau đó trộn 15 đơn vị khối dung dịch với 11 đơn vị khối Glyxêrin. Màng tạo bởi dung dịch nói trên với dây đồng thau là khá bền vững. Bản thân đường kính dây không nên vượt quá 5 — 6 insơ.

Nhờ màng mỏng ta « giải » bài toán Platô rất dễ dàng: chỉ cần cho khung dây những dạng cần thiết. Những mô hình đẹp của các mặt sẽ thu được từ các khung dây hình đa giác tạo bởi các cạnh liên tiếp của các khối đa diện đều. Đặc biệt, sẽ rất thú vị khi nhúng vào dung dịch một khung dây hình lập phương. Lúc này ta được một hệ thống các mặt phẳng cắt nhau theo một góc 120^0. Nếu nhấc lập phương ra khỏi dung dịch thật cẩn thận thì có thể đếm được mười ba mặt gần như phẳng. Sau đó có thể chọc thủng và phá đi từng mặt cho đến khi chỉ còn một mặt giới hạn bởi chu tuyến đa giác đóng. Bằng cách như vậy, ta có thể thu được một loạt các mặt tuyệt đẹp. Cũng có thể làm thí nghiệm như vậy với khối tứ diện.

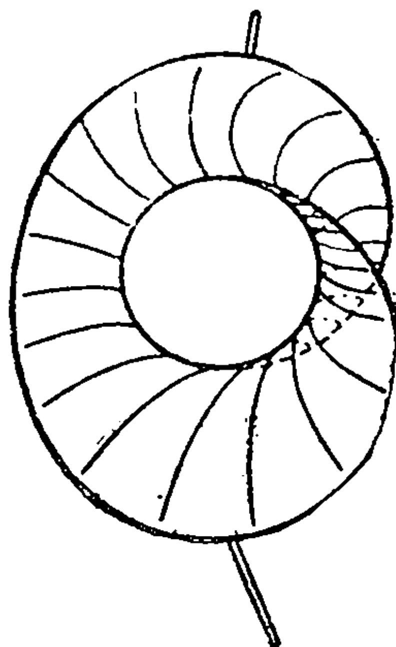
2. Những thí nghiệm mới thuộc về bài toán Platô. Thí nghiệm với màng mỏng không phải chỉ qui về việc chứng minh các mặt cực tiểu căng trên một chu tuyến đóng (như Platô); phạm vi tác dụng của chúng còn rộng hơn. Trong thời gian gần đây, bài toán các mặt cực tiểu đã được nghiên cứu không những cho một chu tuyến giới nội mà cho một hệ thống những

chu tuyến như thế, ngoài ra còn phải lưu ý đến khả năng tạo ra những mặt cực tiểu có cấu trúc tôpô phức tạp hơn. Chẳng hạn, có những mặt cực tiểu một phía và những mặt cực tiểu thuộc loại khác 0. Các bài toán tổng quát hơn đã sản sinh những hiện tượng hình học khác nhau kỳ diệu có thể biểu diễn được nhờ màng xà phòng. Ta nhận thấy rằng những khung dây mềm mại là rất có ích cho việc nghiên cứu sự thay đổi hình dạng của các mặt màng mỏng dưới ảnh hưởng của biến dạng liên tục khung dây. Ta sẽ mô tả một số thí nghiệm



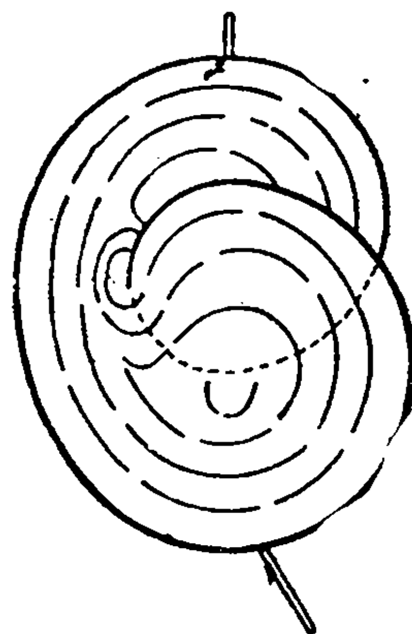
H. 240. Trên khung lập phương có căng 13 mặt gần như phẳng

1. Nếu chu tuyến biên là đường tròn, thì mặt có hình đĩa tròn. Liệu có thể hy vọng rằng khi biến dạng liên tục chu tuyến thì mặt cực tiểu sẽ luôn luôn bảo toàn một tính chất tôpô như thế hay không. Điều này không đúng. Nếu uốn chu tuyến như đã chỉ trên H. 241 thì thay cho mặt tương đương tôpô với đĩa ta được băng Miôbiux một phía. Đảo lại, có thể thực hiện một biến dạng xuất phát từ chu tuyến với màng căng là băng Miôbiux như đã biểu thị trên hình vẽ. Để thực hiện được biến dạng liên tục, ta cần gắn vào khung một tay quay (cũng xem hình vẽ đó). Trong quá trình biến dạng ngược sẽ có lúc đột nhiên tính



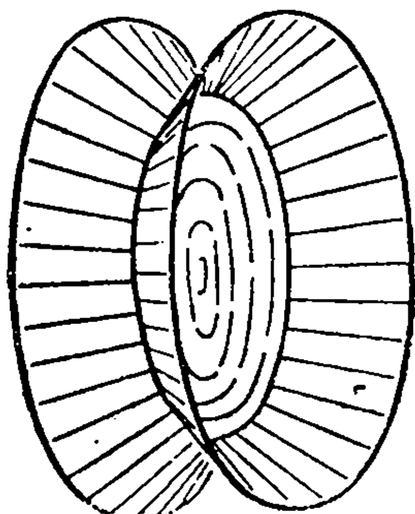
H. 241. Mặt một phía (băng Miôbiux)

chất tôpô của băng thay đổi và một lần nữa sinh ra mặt dạng đĩa (H.242). Thực hiện biến dạng một lần nữa ta lại quay trở về băng Miôbiux. Tuy nhiên, có điều đáng lưu ý là « sự đột biến » của mặt hình đĩa thành mặt loại Miôbiux xuất hiện trong giai đoạn chậm hơn của sự biến dạng so với quá trình ngược lại. Điều đó chứng tỏ có một chuỗi liên tục các chu tuyến không gian đóng mà đối với chúng thì cả mặt Miôbiux và mặt hình đĩa đều bền vững, tức là đạt tới cực tiểu tương đối. Nhưng nếu mặt Miôbiux có diện tích nhỏ hơn rất nhiều so với mặt kia thì mặt thứ hai này cũng rất không bền vững.



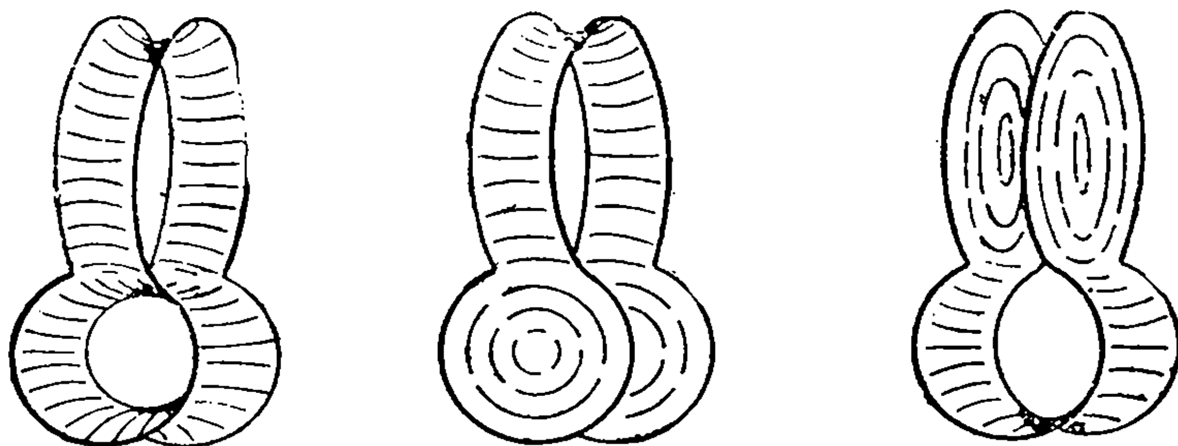
H. 242. Mặt hai phía.

2. Có thể căng một mặt cực tiểu trên một hệ thống các chu tuyến gồm hai đường tròn. Nhấc khung ra khỏi dung dịch ta được một mặt mà cấu trúc gồm ba mặt tiếp hợp theo góc 120°; một mặt là đĩa tròn thông thường, mặt phẳng chứa nó song song với các mặt phẳng của các đường tròn biên H.243. Khi phá hủy đĩa đó, ta được một Catênôid cổ điển (mặt tạo nên do quay đường dây xích đã đề cập đến ở mục 2, §10 xung quanh đường thẳng vuông góc với trục đối xứng). Khi đẩy xa các chu tuyến biên sẽ có một lúc nào đó Catênôid nhị liên thủng ra và biến thành hai đĩa riêng biệt. Tất nhiên quá trình vừa nêu là không thể đảo ngược lại.



H. 243. Hệ thống ba mặt.

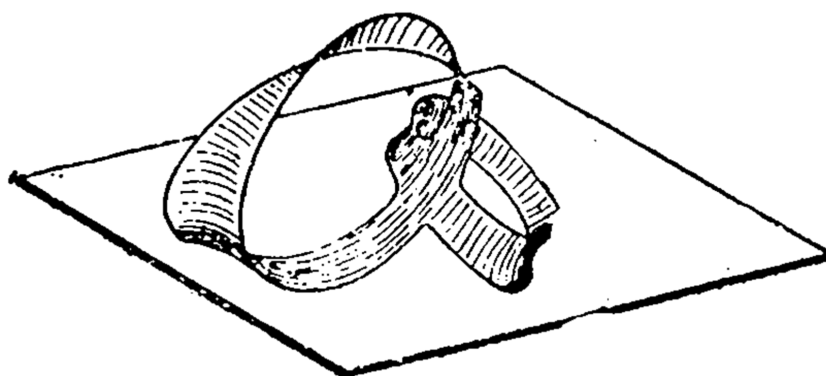
3. Chiếc khung (vẽ trên H.244 — 246) cho ta một thí dụ kỳ lạ nữa, có thể có ba mặt cực tiểu khác nhau được căng trên khung này. Một mặt (H.244) có loại 1,



H.244 — 246. Ba mặt khác nhau loại O và 1 được căng trên khung.

trong khi hai mặt kia đơn liên và có tính đối xứng lẫn nhau theo một ý nghĩa nào đó. Hai mặt sau này có cùng một diện tích nếu chu tuyến là hoàn toàn đối xứng. Trong trường hợp trái lại thì chỉ có một mặt bảo đảm cực tiểu tuyệt đối của diện tích ; mặt kia bảo đảm cực tiểu tương đối (ở đây ta giả thiết cực tiểu chỉ tìm ra được cho các mặt đơn liên). Khả năng tạo thành mặt loại 1 được qui bởi sự kiện là nếu như có mặt loại 1 thì ta có thể thu được một mặt có diện tích nhỏ hơn cho bất kỳ mặt đơn liên nào. Khi biến dạng chu tuyến, nếu sự biến dạng đủ mạnh, ta sẽ đi tới một vị trí mà tính chất đã nêu sẽ mất đi. Khi đó mặt loại 1 sẽ mất tính bền vững của nó và đột nhiên vỡ ra biến thành mặt đơn liên thuộc một trong hai kiểu vẽ trên H.245 và 246. Mặt khác, nếu ta xuất phát từ một mặt thuộc một trong hai kiểu đó, chẳng hạn mặt vẽ trên H.246, thì có thể biến dạng chu tuyến sao cho kiểu kia sẽ bền vững hơn rất nhiều (xem H.245). Hệ quả của điều này là điều kiện nảy sinh đến một lúc nào đó đột

nhiên có sự chuyển từ kiểu này sang kiểu khác. Nếu thực hiện biến dạng theo chiều ngược lại một cách từ từ, ta lại đưa chu tuyến trở về vị trí xuất phát một lần nữa, nhưng mặt cực tiểu căng trên nó bây giờ đã khác. Có thể lặp lại toàn bộ quá trình một lần nữa theo chiều ngược lại, bằng cách như thế có thể lặp lại nhiều lần sự chuyển từ một mặt kiểu này sang một mặt kiểu khác. Khi thao tác chu tuyến một cách thích hợp, ta có thể biến đổi một trong những mặt đơn liên thành mặt loại 1. Muốn thế, phải đưa lại gần nhau những phần tử của chu tuyến mà trên đó có những bộ phận hình dĩa của mặt — sao cho mặt loại 1 trở nên bền vững hơn rất nhiều. Có khi, trong quá trình thực hiện thao tác với chu tuyến nói trên có những màng mỏng trung gian sẽ được hình thành, cần phá hủy chúng đi để có mặt loại 1.

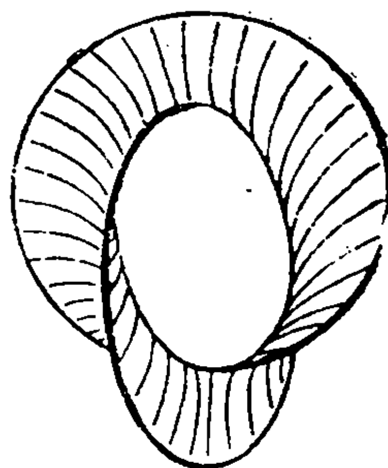


H.247. Mặt cực tiểu một phía có cấu trúc tôpô phức tạp hơn căng trên chu tuyến kín đơn giản

Thí dụ này chứng tỏ không những chỉ có thể giải bài toán Platô bằng những mặt khác nhau thuộc cùng một kiểu tôpô mà còn có thể giải bằng những mặt khác kiểu có cùng một chu tuyến, ngoài ra, nó còn minh họa sự chuyển giai đoạn từ một lời giải này đến lời giải khác, trong khi các điều kiện biên của bài toán thay đổi liên tục.

Cũng dễ xây dựng những mô hình phức tạp hơn loại đó và nghiên cứu chúng bằng thực nghiệm.

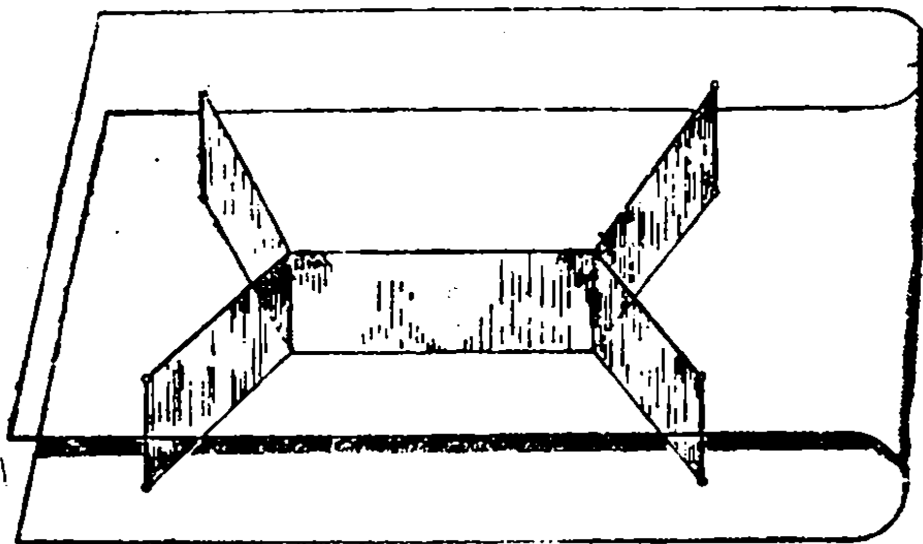
Một hiện tượng thú vị là sự nảy sinh những mặt cực tiểu giới hạn hoặc một số nhiều hơn các chu tuyến đóng móc xích nhau. Trong trường hợp hai chu tuyến tròn ta thu được mặt vẽ trên H. 248. Nếu các mặt phẳng hình tròn vuông góc nhau và giao tuyến của chúng là đường kính chung của hai hình tròn thì có hai dạng mặt cực tiểu xuyên tâm đối nhau có diện tích bằng nhau. Bây giờ ta tưởng tượng có hai hình tròn biến đổi từ từ liên tục vị trí tương đối của chúng, khi đó dạng của mặt cực tiểu sẽ biến đổi liên tục, dẫu rằng ở mỗi vị trí của các hình tròn thì chỉ có một trong các mặt đạt cực tiểu tương đối. Ở những vị trí nào đó thì mặt cực tiểu tương đối đột nhiên vỡ ra và được thay thế bởi mặt cực tiểu tuyệt đối. Trong thí dụ này, cả hai mặt cực tiểu sẽ có cùng một kiểu tôpô (chẳng hạn như các mặt trên H. 245 và H. 246).



H. 248. Mặt căng trên hai đường tròn móc xích nhau.

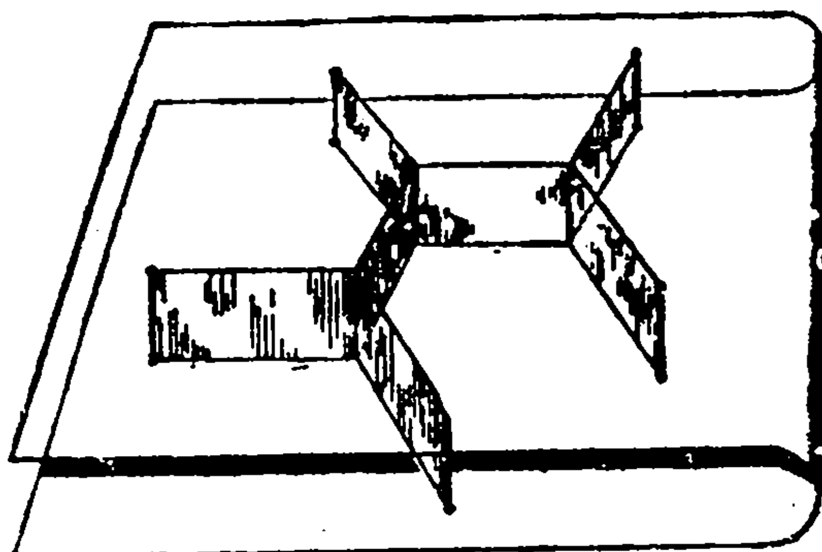
4. Lời giải thực nghiệm của các bài toán toán học khác. Nhờ tác dụng của sức căng mặt ngoài, màng chất lỏng chỉ có thể ở trong trạng thái cân bằng bền với điều kiện diện tích của mặt tạo thành là tối thiểu. Tình trạng đó là nguồn vô tận những thực nghiệm có giá trị toán học nghiêm túc. Nếu những bộ phận nào đó của biên màng mỏng có thể di chuyển tự do theo những mặt cho trước (những mặt phẳng chẳng hạn) thì ở trên những phần đó của biên, màng mỏng sẽ vuông góc với mặt đã cho.

Ta có thể dùng tình trạng này để giải bài toán Stâyne và bài toán mở rộng của nó (xem § 5). Giả thử hai mặt thủy tinh (hoặc những tấm nhẵn) song song với nhau được nối lại bằng ba hoặc một số nhiều hơn các thanh thẳng đứng. Nếu ta nhúng toàn bộ hệ thống này trong dung dịch xà phòng rồi nhấc lên thì giữa các mặt phẳng sẽ có một loạt các dải thẳng đứng liên kết các thanh với nhau. Hình chiếu của những dải này trên các mặt nằm ngang chính là lời giải của bài toán Stâyne đã xét ở § 5 chương VII. Nếu hai mặt phẳng không song song, hoặc các thanh không vuông góc với chúng hoặc bản thân các mặt không phẳng thì những đường cong theo đó màng mỏng cắt các mặt có thể minh họa cho lời giải của những bài toán biến phân mới.



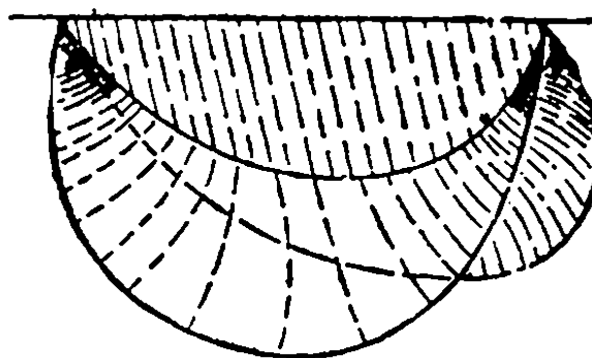
H. 249. Minh họa hệ thống đường đi ngắn nhất giữa 4 điểm

Sự xuất hiện những đường cong theo đó các mặt cực tiểu khác nhau tiếp hợp theo các góc 120° có thể được xem như sự mở rộng trong không gian của các



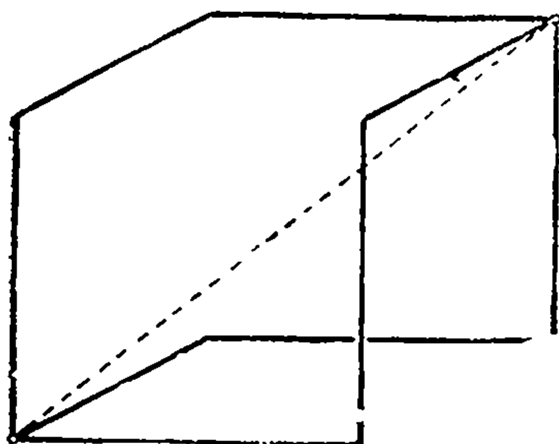
H. 250. Hệ thống đường ngắn nhất
giữa 5 điểm

hiện tượng có liên quan với bài toán Stâyne. Điều này trở nên rất rõ ràng nếu ta nối hai điểm A, B chẳng hạn bởi ba đường cong không gian khác nhau rồi nhúng hệ thống này vào dung dịch xà phòng. Để xác định, ta giả thiết một trong ba đường cong là một đoạn thẳng, hai đường cong kia là hai cung tròn bằng nhau. Điều xảy ra được minh họa trên H.251. Nếu mặt phẳng chứa các cung tạo với nhau góc nhỏ hơn 120⁰, ta được lời giải của bài toán cực tiểu dưới dạng ba mặt tiếp hợp theo các góc 120⁰. Nhưng nếu ta quay các mặt phẳng chứa các cung bằng cách tăng góc bao hàm giữa chúng thì do biến thiên liên tục lời giải rút cục sẽ chuyển thành hai viên phân phẳng.



H. 251. Ba mặt cắt nhau góc 120^0 được căng trên ba sợi dây nối hai điểm

Bây giờ ta giả thử các điểm A và B được nối lại bằng những đường cong phức tạp hơn. Để làm thí dụ ta lấy ba đường gấp khúc, mỗi đường gồm ba cạnh của cùng một hình lập phương và nối các đỉnh đối diện bởi các đường chéo. Lúc này ta có ba mặt cực tiểu bằng nhau cắt nhau theo các đường chéo của lập phương. Ta sẽ thu được một hệ thống mặt như thế từ hệ thống vẽ trên H. 240 bằng cách phá đi các màng kề với ba cạnh được chọn thích hợp. Nếu ta biến dạng các đường gấp khúc nối A và B thì các đường tiếp hợp của các mặt sẽ bị uốn cong, nhưng tất nhiên các góc vẫn là 120° (H. 252).

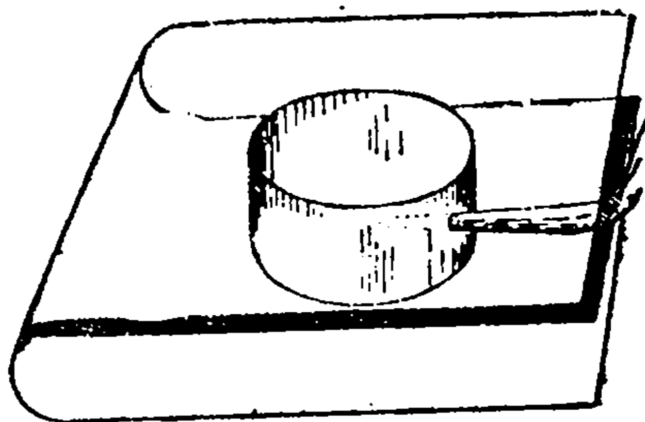


H. 252. Ba đường gấp khúc nối hai điểm.

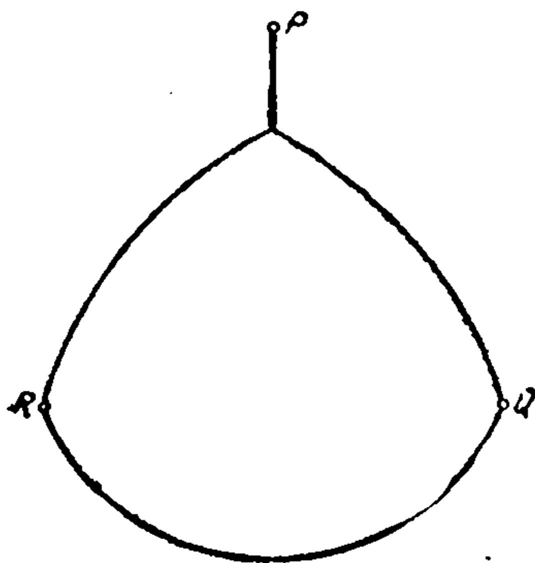
Mọi hiện tượng liên quan với sự tiếp hợp của ba mặt cực tiểu theo một đường cong có cùng một bản chất: chúng là sự mở rộng của bài toán phẳng về vấn đề nối một hệ n điểm cho trước bằng một hệ thống đường ngắn nhất.

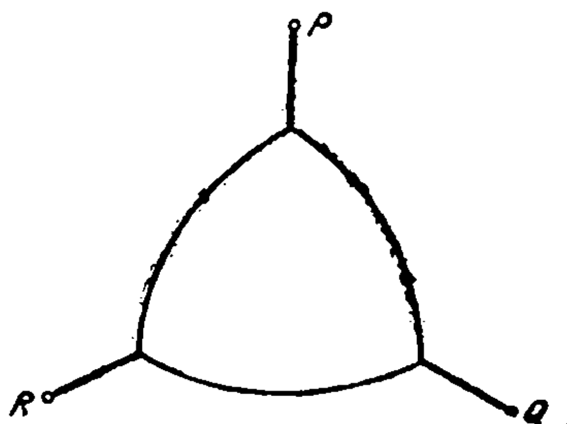
Cuối cùng, ta nói thêm vài câu về bong bóng xà phòng. Bong bóng xà phòng có dạng hình cầu chứng tỏ trong các mặt đóng có cùng thể tích (xác định bởi khối không khí chứa trong nó) thì mặt cầu có diện tích nhỏ nhất. Nếu ta xét những bong bóng có thể tích cho trước có xu hướng giảm dần diện tích của nó nhưng tuân theo những điều kiện phụ nào đó thì ta nhận thấy rằng không bắt buộc phải có mặt cầu mà nói chung, ta được những mặt có độ cong trung bình không đổi. Những trường hợp riêng của những mặt như thế là mặt cầu và mặt trụ tròn xoay.

Chẳng hạn, ta giả thiết bong bóng bao hàm giữa hai tấm kính song song nhúng vào dung dịch xà phòng. Khi sờ tay vào một trong hai mặt phẳng, bong bóng đột nhiên có dạng bán cầu. Nếu sờ vào mặt phẳng kia, nó lập tức biến thành mặt trụ tròn xoay, chính điều này đã minh họa rất trực quan tính chất đẳng chu của đường tròn. Tất nhiên, mọi vấn đề là ở chỗ màng xà phòng vuông góc với các mặt giới hạn.



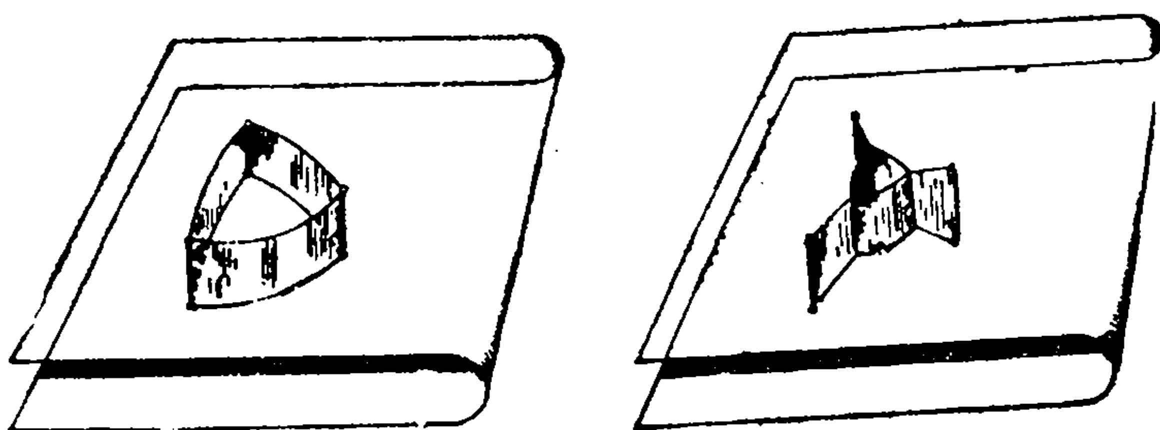
H. 253 Kiểm chứng tính chất đẳng chu của đường tròn.





Còn có thể xét xem lời giải của bài toán đẳng chu thay đổi như thế nào khi tăng hoặc giảm thể tích không khí bên trong bong bóng. Ở đây phải dùng đến một cái ống nhỏ hoặc một cọng rơm. Song, khi hút không khí, ta không thu được những H. 231 — 235 gồm các

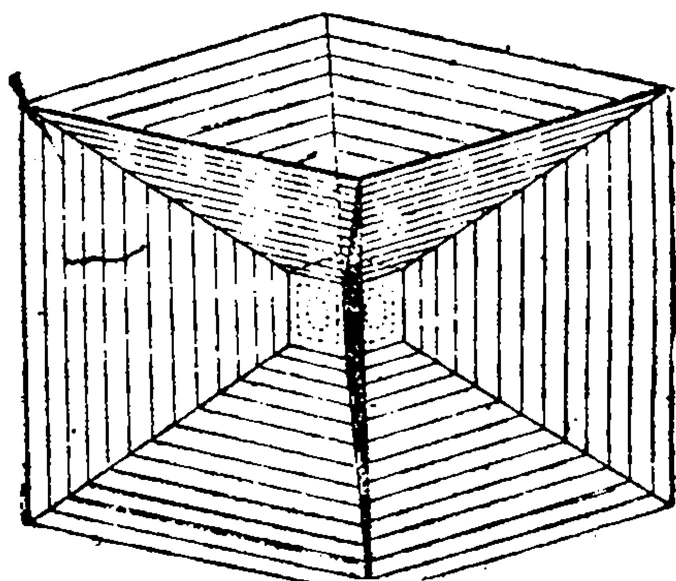
cung tròn tiếp xúc nhau. Khi giảm thể tích không khí bên trong bong bóng thì các góc trong tam giác (gồm các cung tròn) sẽ không nhỏ hơn 120° (về mặt lý thuyết). Ta thu được những hình biểu diễn trên H. 222 và 223 mà khi giảm vô hạn diện tích bao hàm bên trong thì khi tới giới hạn ta sẽ thu được ba viên phân mà ta đã gặp trước đây (H. 235). Với quan điểm toán học, nguyên nhân của sự khác biệt nhận thấy được là ở chỗ đoạn thẳng nối bong bóng với một thanh tùy ý, không nên tính làm hai lần bắt đầu từ lúc tách bong bóng ra khỏi thanh này. Các thí nghiệm tương ứng được thể hiện trên H. 256 và 257.



H. 256 — 257: Kiểm chứng tính chất đẳng chu của các hình nhờ màng xà phòng.

Khi đặt bong bóng xà phòng bên trong một khung dây lập phương, ta thu được các mặt có độ cong trung bình không đổi với đáy hình vuông, nếu thể tích của bong bóng lớn hơn thể tích lập phương. Khi hút không khí ra khỏi bong bóng qua cọng rơm, ta sẽ có một dãy các cấu trúc đẹp, rút cục sẽ dẫn đến cấu trúc vẽ trên H.258. Hiện tượng bền vững và sự chuyển từ một trạng thái cân bằng này sang trạng thái khác sẽ sinh ra những thực nghiệm mà về phương diện toán học

không thể không gọi là những thực nghiệm có tính chất giáo dục khá tốt. Như vậy, một minh họa trực quan cho lý thuyết các giá trị dừng: một chuỗi liên tục các sự chuyển tiếp từ một trạng thái cân bằng này đến một trạng thái khác có thể được chọn sao cho, trong nó có một trạng thái cân bằng không bền mà vẫn là một « trạng thái dừng ».



H. 258. Bong bóng xà phòng trên khung lập phương.

Để làm thí dụ, ta xét một cấu trúc lập phương trên H. 240. Ở đây ta nhận thấy sự vi phạm phép đối xứng: ở tâm của lập phương có một diện tích nhỏ vuông góc tiếp hợp với mười hai mặt xuất phát từ các cạnh của lập phương. Nhưng lúc này dễ nhận thấy rằng phải tồn tại ít nhất hai vị trí cân bằng: một vị trí với diện tích nhỏ ở tâm thẳng đứng và vị trí kia với diện tích nhỏ ở tâm nằm ngang. Thực ra, muốn chuyển từ một vị trí cân bằng này sang vị trí khác thì phải thổi (qua cọng rơm) vào cạnh của diện tích nhỏ ở tâm. Bằng cách này có thể biến diện tích nhỏ ở tâm này thành một điểm — tâm của lập phương, nhưng trạng thái cân bằng thu được bằng cách như vậy sẽ không bền và từ từ chuyển sang trạng thái bền vững khác trong đó một lần nữa lại nảy sinh ra diện tích nhỏ ở tâm nhưng đã quay đi 90°.

Cũng có thể tiến hành một thực nghiệm tương tự với màng xà phòng minh họa lời giải của bài toán Stâyne cho trường hợp bốn điểm đặt tại các đỉnh của hình vuông (H. 219, 220).

Nếu ta muốn có lời giải của các bài toán vừa xét như là một trường hợp giới hạn của một chuỗi các bài toán đẳng chu, chẳng hạn muốn thu được H.240 từ H.258, thì phải hút một ít không khí ra khỏi bong bóng trung tâm. Cấu trúc, biểu thị trên H.258 sẽ là thật đối xứng và ngay cả trong trường hợp giới hạn, khi thể tích « lập phương nhỏ » ở tâm triệt tiêu, ta cũng thu được một cấu trúc đối xứng gồm 12 tam giác phẳng có đỉnh chung ở tâm. Thực ra thì có thể đạt được như vậy. Nhưng vị trí cân bằng tới hạn này sinh ra là không bền: đột nhiên, nó bị thay thế bởi một trong ba vị trí vẽ trên H. 240. Có thể quan sát rất rõ ràng, nếu dung dịch được làm nhớt hơn so với dung dịch đã kê trong đơn. Trước mắt ta, có một bức tranh rõ nét chứng tỏ ngay trong các bài toán vật lý, không phải bao giờ lời giải cũng phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện ban đầu. Thực vậy, trong trường hợp tới hạn, khi mà thể tích không khí chứa trong bong bóng hình lập phương dần tới 0 thì lời giải vẽ trên H. 240 không phải là cái tới hạn cho một chuỗi lời giải vẽ trên H.258 được sinh ra cho các thể tích khác nhau ε khi ε dần tới 0.

CHƯƠNG VIII

GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

MỞ ĐẦU

Thật là quá ư đơn giản nếu cho rằng giải tích toán học đã được « sáng chế » ra bởi hai người: Niutơn và Laybnitx. Trong thực tế, nó là kết quả của một quá trình tiến hóa lâu dài, không bắt đầu cũng như

không kết thúc bởi Niutơn hoặc Lâybnitx, nhưng hai ông đã có vai trò khá quan trọng. Một số nhà toán học nhiệt tâm ở nhiều nước châu Âu thế kỷ XVII đã đề ra mục tiêu tiếp tục các công trình toán học của Galilê và Kêple. Họ đã giữ vững liên lạc với nhau bằng thư từ và những cuộc gặp gỡ cá nhân. Họ đã bị thu hút vào hai bài toán trung tâm. Một là, *bài toán tiếp tuyến*: xác định tiếp tuyến với đường cong cho trước là nhiệm vụ cơ bản của phép tính vi phân. Hai là, *bài toán cầu phương*: xác định diện tích liên kết với đường cong cho trước là nhiệm vụ cơ bản của phép tính tích phân. Công lao vĩ đại của Niutơn và Lâybnitx là hai ông đã nhận thức được rõ ràng *mối liên hệ nội tại giữa hai bài toán đó*. Phương pháp thống nhất như vậy là một vũ khí khoa học mạnh trong tay hai ông. Những biểu thị bằng ký hiệu kỳ lạ do Lâybnitx nghĩ ra đã quyết định một phần lớn sự thành công này. Công lao của nhà bác học này tuyệt nhiên không hề giảm sút tuy ông bị chi phối bởi những tư tưởng mơ hồ, những tư tưởng này có lúc đã thay thế sự thiếu nhận thức chính xác trong những bộ óc thích chủ nghĩa thần bí hơn là sự rõ ràng. Niutơn, nhà hoạt động khoa học chính xác theo ý nghĩa chân thực của từ đó chắc là được sự cổ vũ của thầy học và bậc tiền bối của mình. là *Barâu* (1630—1677); còn Lâybnitx thì đã đi đến với toán học nhanh hơn từ bên ngoài. Là một người am hiểu xuất sắc các qui luật, nhà ngoại giao và nhà triết học, một trong những bộ óc hoạt động nhất và đa dạng nhất thời ấy, ông đã nghiên cứu toán học trong một thời gian tương đối ngắn ở chỗ Huyghenx, một nhà vật lý học, trong thời gian ông lưu lại ở Pari trong một hội nghị ngoại giao. Ngay sau đó, ông đã công bố những kết quả trong đó có chứa cái lõi của giải tích hiện đại. Niutơn thì không công bố những phát

minh mà ông đã tìm ra từ trước đó rất lâu. Hơn nữa, tuy đã tìm ra được nhiều kết quả bước đầu trong tác phẩm « Principia » bất hủ của mình bằng phương pháp giải tích, nhưng ông lại trình bày chúng bằng văn phong của hình học cổ điển: trong « Principia » hầu như không có dấu vết rõ ràng của giải tích. Mãi về sau, tác phẩm của ông mới được công bố. Những người hâm mộ ông đã tranh cãi quyết liệt về quyền ưu tiên với các bạn bè của Lâybnitx. Họ kết tội ông này đã đánh cắp kết quả của Niutơn mặc dầu có thể có một phát minh đồng thời và độc lập khi mà bầu khí quyền đã tràn đầy những yếu tố của một lý thuyết mới nào đó. Sự tranh chấp quyền phát minh giải tích là một thí dụ đáng buồn về sự đánh giá quá cao vấn đề quyền ưu tiên, đã đầu độc bầu khí quyền của sự thống nhất khoa học.

Chương này cần được xem như phần mở đầu sơ cấp có mục đích giới thiệu với bạn đọc những khái niệm cơ bản nhiều hơn là nghiên cứu những phép toán hình thức. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng rộng rãi « ngôn ngữ trực giác » với chủ ý sao cho nó không mâu thuẫn với những khái niệm chính xác và những phép toán được xây dựng một cách khoa học.

§ 1. TÍCH PHÂN.

1. Diện tích coi như một giới hạn. Muốn tính diện tích của một hình phẳng, ta chọn một hình vuông có cạnh bằng đơn vị dài làm *đơn vị diện tích*. Nếu đơn vị dài là centimet thì đơn vị diện tích tương ứng là centimet vuông, tức là hình vuông mà độ dài cạnh bằng một centimet. Nhờ định nghĩa này ta tính được rất dễ dàng diện tích hình chữ nhật. Nếu độ dài hai cạnh kề nhau được biểu thị bởi các số p và q thì diện tích hình chữ

nhật được biểu thị bằng pq đơn vị diện tích, hay nói gọn hơn diện tích bằng tích pq. Điều này đúng với mọi p và q hữu tỷ hoặc vô tỉ. Ta được kết quả đó bằng cách thay thế $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{m'}{n'}$, trong đó m, n, m', n' là các số nguyên. Sau đó ta tìm được độ đo chung $\frac{1}{N} = \frac{1}{nn'}$ của hai cạnh. Cuối cùng, ta phân chia hình chữ nhật thành những hình vuông nhỏ có cạnh $\frac{1}{N}$, có diện tích $\frac{1}{N^2}$. Số tất cả những hình vuông con như vậy là nm'.mn' và diện tích chung bằng nm'.mn' $\frac{1}{N^2} = \frac{nm'.mn'}{n^2n'^2} = \frac{m}{n} . \frac{m'}{n'} = pq$. Đối với trường hợp p và q vô tỉ, ta cũng có kết quả này nếu đầu tiên ta thay thế p và q bởi các số hữu tỉ gần đúng tương ứng p_r và q_r rồi buộc p_r và q_r dần tới p và q.

Về hình học thì hiển nhiên rằng diện tích tam giác bằng nửa diện tích hình chữ nhật có cùng đáy b và chiều cao h; vì thế diện tích tam giác được biểu thị bởi công thức đã biết $\frac{1}{2}bh_1$. Một miền phẳng tùy ý giới hạn bởi một hoặc nhiều đường gấp khúc có thể phân chia thành những tam giác; vì thế diện tích của nó có thể tính được như là tổng diện tích của các tam giác.

Nhu cầu về một phương pháp tổng quát hơn để tính diện tích, nảy sinh ra từ vấn đề tính diện tích các hình bị giới hạn không còn là bởi những đường gãy khúc nữa mà là bởi những đường cong. Chẳng hạn, ta sẽ định nghĩa diện tích hình tròn hoặc diện tích một viên phân

của parabol như thế nào? Đây là một vấn đề quan trọng, việc giải quyết nó có liên quan với việc xây dựng phép tính tích phân đã được nghiên cứu từ rất lâu. Ngay trong thế kỷ III trước công nguyên, Acsimet đã tính diện tích loại này nhờ qui trình « vét cạn ». Chúng ta thử đứng trên quan điểm « ngây thơ » cùng với Acsimet và các nhà toán học vĩ đại trước Gaux. Theo quan điểm này thì các diện tích cong sẽ là những *bản thể cho trước một cách trực giác*, vấn đề không phải là ở chỗ *định nghĩa* khái niệm diện tích mà là tính diện tích, (tuy nhiên có thể xem phân tích khái niệm đó ở phần phụ lục chương 8). Cần nội tiếp trong miền cong đang xét một đa giác mà diện tích xác định được dễ dàng. Chọn một đa giác mới cùng loại chứa đa giác thứ nhất, ta được một xấp xỉ tốt hơn một diện tích cho trước. Tiếp tục như vậy, ta đã « vét cạn » dần toàn bộ miền và thu được diện tích phải tìm như là giới hạn các diện tích của một dãy các đa giác có số cạnh tăng lên. Có thể tính diện tích hình tròn bán kính 1, giá trị bằng số của nó được biểu thị bởi ký hiệu π.

Acsimet đã thực hiện lược đồ chung đó cho trường hợp hình tròn và viên phân parabolic. Trong thế kỷ XVII đã giải quyết thành công nhiều thí dụ khác. Trong mỗi trường hợp thì bản thân phép tính giới hạn sẽ phụ thuộc vào biện pháp độc đáo được lựa chọn riêng cho mỗi bài toán. Một trong những thành tựu chủ yếu của giải tích là sự thay thế những qui trình chuyên biệt đó bằng một phương pháp chung có hiệu lực.

2. Tích phân. Khái niệm cơ bản đầu tiên của giải tích là khái niệm tích phân. Trong chương này, ta sẽ hiểu tích phân như *diện tích dưới đường cong* biểu thị qua giới hạn. Giả thử cho trước một hàm dương liên tục $y = f(x)$ như $y = x^2$ hoặc $y = 1 + \cos x$ chẳng hạn. Ta xét một miền, giới hạn bên dưới bởi một

đoạn từ một điểm a nào đó đến một điểm b nào đó của trục (trong đó a nhỏ hơn b), bên phải và bên trái giới hạn bởi các đường vuông góc với trục x tại các điểm này, bên trên bị giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$. Mục tiêu của ta là tính diện tích A của miền này.

Vì, nói chung, không thể phân chia một diện tích như vậy thành các hình chữ nhật hoặc các hình tam giác, cho nên không thể trực tiếp chỉ ra một công thức toán học chính xác thích hợp để tính diện tích A. Nhưng ta có thể tìm được những giá trị gần đúng cho A và từ đó biểu thị A như là giới hạn bằng cách như sau: ta chia khoảng từ $x = a$ đến $x = b$ thành một số nào đó các khoảng thành phần nhỏ rồi dựng các đường vuông góc tại mỗi điểm chia; mỗi dải của miền nằm dưới đường cong được thay bằng một hình chữ nhật, chiều cao của hình chữ nhật là tùy ý nằm giữa các tung độ lớn nhất và nhỏ nhất của đường cong trong dải đó. Tổng S các diện tích của các hình chữ nhật cho ta giá trị gần đúng của diện tích thực « nằm ở dưới » đường cong đã cho. Độ chính xác của xấp xỉ đó càng lớn nếu số hình chữ nhật càng lớn và chiều rộng của mỗi dải càng nhỏ. Vậy, ta thừa nhận định nghĩa diện tích sau đây: Nếu ta xây dựng một dãy:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots \qquad (1)$$

các xấp xỉ diện tích đường cong bằng những hình chữ nhật, trong đó đáy của hình chữ nhật rộng nhất trong tổng S_n dần tới 0 khi n tăng, thì dãy (1) sẽ dần tới giới hạn A:

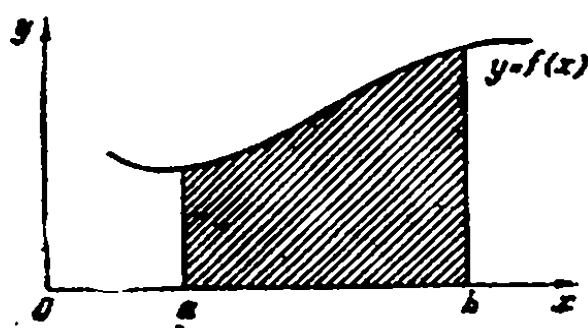
$$S_n \to A \qquad (2)$$

giới hạn A này chính là diện tích cong đã cho; nó không phụ thuộc vào cách chọn dãy (1) nếu như đáy của các hình chữ nhật giảm đi vô hạn (thí dụ S_n có thể thu được từ S_{n-1} bằng cách thêm vào một số điểm mới, hoặc việc chọn các điểm chia cho S_n có thể hoàn toàn

không phụ thuộc vào việc chọn các điểm cho S_{n-1}). Diện tích A của miền đã cho được biểu thị qua giới hạn đã nêu ở trên được gọi là tích phân của hàm f(x) từ a đến b. Với việc đưa vào một ký hiệu riêng – dấu tích phân, ta viết như sau:

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Các ký hiệu $\int$, dx và tên gọi « tích phân » do Lâybnitx đưa vào có ý để nhấn mạnh phương pháp tìm giới hạn này. Để giải thích ký hiệu đó, ta nhắc lại tỉ mỉ hơn quá trình xấp xỉ diện tích A. Đồng thời, việc diễn đạt bằng giải tích của sự chuyển bước qua giới hạn cho phép ta vứt bỏ giả thiết chật hẹp $f(x) \geqslant 0$ và $b > a$. Rút cục ta tránh được khái niệm trực giác ban đầu của tích phân với việc coi nó như « diện tích cong ».



H.259. Tích phân xem như một diện tích.

Ta phân chia khoảng từ a đến b thành n khoảng nhỏ riêng biệt. Để cho đơn giản, ta giả thiết chúng có độ dài bằng nhau $\frac{b-a}{n}$.

Ta ký hiệu các điểm chia như sau:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots$$

$$x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

Để biểu thị đại lượng $\frac{b-a}{n}$ ta đưa vào ký hiệu Δx

(đọc là « đenta x »):

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = x_{j+1} - x_j,$$

trong đó ký hiệu Δ biểu thị « hiệu số ». Đó là ký hiệu phép toán, không được xem là thừa số bằng số. Ta có thể chọn giá trị $y = f(x)$ nằm ở điểm mút bên phải của khoảng tương ứng làm chiều cao của mỗi hình chữ nhật. Như vậy, tổng diện tích các hình chữ nhật sẽ bằng:

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x \qquad (4)$$

hoặc viết tắt:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x \qquad (5)$$

Ký hiệu $\sum_{j=1}^{n}$ (đọc là « tổng theo j từ 1 đến n ») biểu thị tổng của tất cả các biểu thức có được khi j chạy liên tiếp qua các giá trị 1, 2,..., n.

Việc dùng ký hiệu Σ để biểu thị kết quả của tổng dưới hình thức ngắn gọn được minh họa bằng những thí dụ sau đây:

$$2 + 3 + 4 + \ldots + 10 = \sum_{j=2}^{10} j,$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{j=1}^{n} j,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2,$$

$$aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{j=1}^{n} aq^j,$$

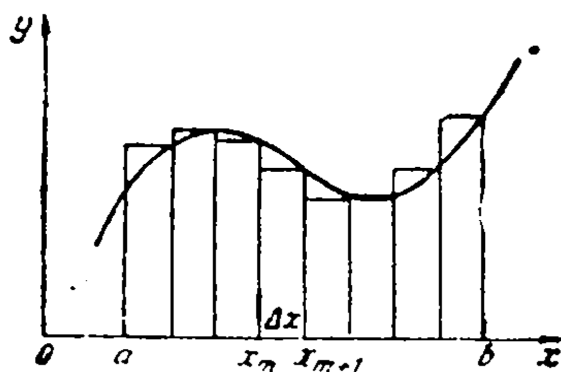
$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + nd) = \sum_{j=0}^{n} (a + jd).$$

Bây giờ ta xây dựng một dãy các xấp xỉ S_n như vậy, trong đó n tăng vô hạn, tức là các số hạng trong mỗi tổng (5) tăng lên vô hạn, đồng thời mỗi số hạng $f(x_j)\Delta x$ dần tới 0 do có thừa số $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Khi n tăng, tổng này dần tới diện tích A:

$$A = \lim \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \qquad (6)$$

Lâybnitx đã ký hiệu sự chuyển qua giới hạn này của các tổng xấp xỉ S_n đến diện tích A bằng cách thay dấu tổng Σ bằng $\int$ và ký hiệu Δx bằng dx (Ở thời Lâybnitx, dấu tổng Σ thường được viết là S và dấu $\int$ là biến dạng dạng đơn giản của chữ S). Tuy rằng cách ký hiệu của Lâybnitx ám chỉ khá tốt phương pháp theo đó ta tìm được tích phân, cũng không nên gán cho những biện pháp ký hiệu giới hạn có tính chất qui ước thuần túy đó một ý nghĩa quá lớn.

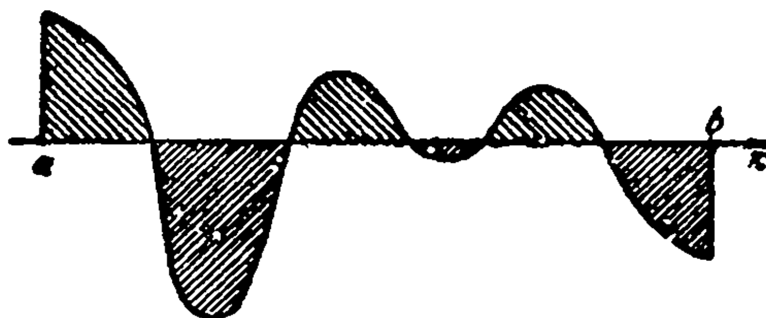
Trong những ngày đầu của giải tích, khi còn chưa có một khái niệm rành mạch về giới hạn và sự cần thiết phải cho qua giới hạn thường bị bỏ qua, nhiều người đã định giải thích ý nghĩa của tích phân bằng cách nói rằng « một số gia hữu hạn Δx được thay thế bởi một đại lượng nhỏ vô hạn dx, bản thân tích phân là tổng của một vô hạn số các số số hạng vô cùng bé f(x)dx. Dù rằng « vô cùng bé » có một sức hấp dẫn đáng kể đối với những bộ óc có thiên hướng tư biện triết học, nó cũng không có và không thể có vị trí trong toán học hiện đại. Không thể đạt tới một mục tiêu có ích nào nếu cứ bao



H. 260. Xấp xỉ diện tích bằng một hình bậc thang.

quanh khái niệm rõ ràng về tích phân một lớp màn khói những câu không có ý nghĩa. Nhưng chính bản thân Laybnitx đôi khi cũng chịu tác dụng lôi cuốn của những ký hiệu của mình. Thực vậy, nếu những ký hiệu đó biểu thị tổng các đại lượng « vô cùng bé » và có thể tính toán với các đại lượng này ở một mức độ nào đó, thì những ký hiệu ấy đã được dùng như các đại lượng thông thường. Thậm chí bản thân từ « tích phân » đã được tạo ra để biểu thị « toàn bộ » tức là diện tích « toàn phần A gồm các phần f(x)dx « vô cùng bé ». Dù sao chăng nữa, khoảng gần một trăm năm sau Niutơn và Laybnitx, người ta mới nhận thức được rõ ràng cơ sở chân thực của định nghĩa tích phân là khái niệm giới hạn chứ không phải cái gì khác. Đứng vững trên quan điểm đó, ta sẽ tránh được mọi sự không rõ ràng, mọi khó khăn và mọi sự vô lý đã gây ra tình trạng lúng túng trong thời kỳ đầu phát triển của giải tích.

3. Những chú ý tổng quát về khái niệm tích phân. Định nghĩa tổng quát. Trong định nghĩa hình học của ta, tích phân được xem như diện tích, ta đã giả thiết rằng hàm f(x) là không âm trong mọi khoảng tích phân [a,b] tức là không có phần đồ thị nào nằm dưới trục x. Trong định nghĩa giải tích, tích phân được xem như giới hạn của một dãy các tổng S_n, giả thiết trên là thừa. Ta chỉ cần lấy những lượng $f(x_j)\Delta x$ nhỏ, lập tổng của chúng và cho qua giới hạn. Qui trình này vẫn còn có ý nghĩa hoàn toàn xác định đối với trường hợp một số hoặc toàn bộ giá trị $f(x_j)$ là âm. Khi minh họa hình học điều này bằng các diện tích (H. 261), ta đi đến kết luận tích phân của f(x) chính là tổng đại số các diện tích giới hạn bởi đồ thị và trục x, trong đó diện tích nằm dưới trục x được coi là âm, phần còn lại là dương.



H. 261 — Các diện tích dương và diện tích âm.

Trong những trường hợp này khác, có thể đi đến tích phân $\int_a^b f(x)dx$, trong đó b nhỏ hơn a, tức $\frac{b-a}{n} = \Delta x$ là số âm. Khi đó trong định nghĩa giải tích của ta các số hạng có dạng $f(x_j)\Delta x$ sẽ âm, nếu $f(x_j)$ dương, Δx âm. Nói cách khác, đại lượng tích phân này chỉ khác dấu với đại lượng tích phân từ b đến a. Như vậy, ta có tính chất đơn giản sau đây của tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ngoài ra, cần nhấn mạnh rằng giá trị tích phân không thay đổi nếu các điểm x_j được chọn không cách đều nhau. Ta có thể chọn x_j tùy ý, lúc đó, hiệu $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ phải được phân biệt nhờ các ký hiệu tương ứng. Trong trường hợp này thì tổng:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_0 + f(x_2)\Delta x_1 + \dots + f(x_n)\Delta x_{n-1}.$$

và cả tổng:

$$S'_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

sẽ dẫn tới cùng một giới hạn như nhau và đến giá trị của tích phân $\int_a^b f(x)dx$ nếu như ta làm thế

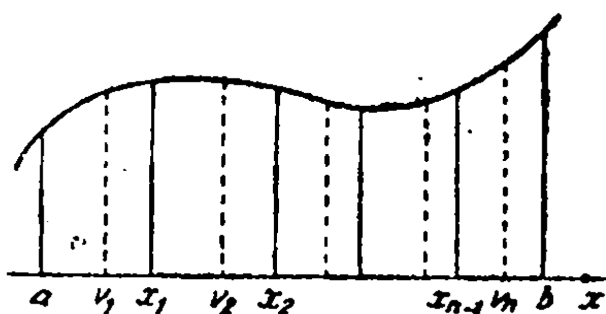
nào cho khi n tăng, tất cả các hiệu $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ dần tới 0 bằng cách nào đó sao cho hiệu lớn nhất (với giá trị n cho trước) dần tới 0 khi n tăng vô hạn.

Định nghĩa hoàn chỉnh của tích phân được cho bởi công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\,\Delta x_j, \qquad (6a)$$

khi $n \to \infty$. Số v_j dưới dấu tổng có thể biểu thị một điểm *tùy ý* trong khoảng $x_j \leqslant v_j \leqslant x_{j+1}$ và sự hạn chế duy nhất đối với phương pháp chia khoảng cơ bản là làm sao cho hiệu lớn nhất trong các hiệu $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ dần tới 0 khi n dần tới vô cực. Không phải chứng minh sự tồn tại giới hạn (6a) nếu ta giả thiết khái niệm « diện tích ở dưới đường cong » và khả năng xấp xỉ diện tích đó bằng các hình chữ nhật là đương nhiên. Một sự phân tích sâu sắc hơn trong những lập luận về sau này sẽ chứng tỏ rằng muốn định nghĩa tích phân một cách hoàn hảo hơn về mặt logic thì cần phải chứng minh sự tồn tại của giới hạn đó độc lập đối với biểu tượng hình học ban đầu về diện tích và với mọi hàm liên tục f(x).

4. Các thí dụ về phép tích phân. Tích phân hàm x^r.



H. 262 — Tính tùy ý của sự phân chia miền xác định của hàm số trong định nghĩa tích phân tổng quát

Cho đến bây giờ các lập luận về tích phân của chúng ta đã là thuần túy lý thuyết. Nảy ra một vấn đề cơ bản về việc xây dựng tổng S_n theo lược đồ chung và về sự chuyển qua giới hạn: qui trình đó liệu có thể dẫn đến những kết quả trong những trường hợp

cụ thể riêng biệt hay không? Tất nhiên, để giải quyết vấn đề đặt ra cần phải có những lập luận bổ sung áp dụng được cho những hàm f(x) đặc biệt mà ta cần tìm tích phân của chúng.

Hai nghìn năm trước đây, khi Acsimet tính diện tích của hình viên phân parabol, ông đã thực hiện cái mà bây giờ ta gọi là phép tích phân hàm $f(x) = x^2$ bằng một phương pháp rất độc đáo. Trong thế kỷ XVII, các bậc tiền bối của Niutơn và Lâybnitx đã giải thành công bài toán lấy tích phân các hàm đơn giản như hàm x^n với các biện pháp đặc biệt. Chỉ sau khi nghiên cứu một số lớn các thí dụ cụ thể, mới có thể tìm được một cách xử lý tổng quát cho bài toán lấy tích phân trên cơ sở một phương pháp có hệ thống, do đó phạm vi các bài toán giải được sẽ mở rộng hơn nhiều. Trong chương này, chúng ta sẽ xét một số ít các bài toán riêng biệt có tính chất kiến thiết thuộc vào thời kỳ «tiền giải tích», bởi vì đối với phép toán tích phân được hiểu như một quá trình giới hạn thì không thể nghĩ ra được những minh họa tốt hơn.

a) Ta bắt đầu từ một thí dụ rất tầm thường. Nếu $y = f(x)$ là không đổi, chẳng hạn $f(x) = 2$, thì tất nhiên tích phân $\int_a^b 2dx$ được xem như một diện tích bằng $2(b-a)$ vì diện tích hình chữ nhật bằng tích của đáy với chiều cao. Ta so sánh kết quả này với tích phân xác định. Nếu trong công thức (5) ta đặt $f(x_j) = 2$ với mọi j, thì với mọi n ta có:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x = \sum_{j=1}^{n} 2\Delta x = 2\sum_{j=1}^{n}\Delta x = 2(b-a);$$

thực vậy :

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta x = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) =$$
$$= x_n - x_0 = b - a.$$

b) Việc tích phân hàm $f(x) = x$ cũng đơn giản như thế. Trong thí dụ này tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang (H. 263). Do đó theo hình học sơ cấp nó được biểu thị bởi công thức :

$$(b - a)\,\frac{b + a}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Kết quả này cũng thu được từ định nghĩa tích phân (6). Căn cứ vào đâu để có thể khẳng định sự chuyển qua giới hạn có thực mà không phải viện vào biểu tượng hình học : nếu trong công thức (5), ta đặt $f(x) = x$ thì tổng S_n có dạng :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\Delta x = \sum_{j=1}^{n} (a + j\Delta x)\Delta x = (na + \Delta x + 2\Delta x +$$
$$+ 3\Delta x + \ldots + n\Delta x)\Delta x = na\Delta x + (\Delta x)^2 (1 + 2 +$$
$$+ 3 + \ldots + n).$$

Áp dụng công thức tổng cấp số cộng $1 + 2 + 3 + + \ldots + n$, ta có :

$$S_n = na\Delta x + \frac{n(n + 1)}{2}(\Delta x)^2.$$

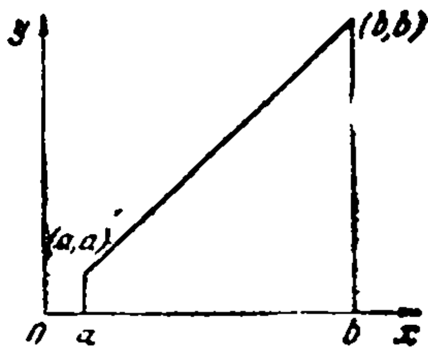
Vì $\Delta x = \frac{b - a}{n}$, cho nên :

$$S_n = a(b - a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 + \frac{1}{2n}(b - a)^2.$$

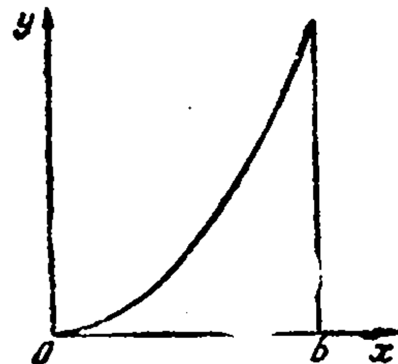
Bây giờ, giả thử n dần tới vô hạn ; chuyển qua giới hạn, ta có kết quả :

$$\lim S_n = \int_a^b x dx = a(b - a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

phù hợp hoàn toàn với thể hiện hình học của tích phân như là một diện tích.



H. 263 – Diện tích hình thang



H. 264 – Diện tích ở dưới parabol

c) Tích phân hàm $f(x) = x^2$ thì ít tầm thường hơn. Acsimet đã dùng phương pháp hình học khi giải bài toán tương đương — tìm diện tích viên phân parabol $y = x^2$. Ở đây, ta sẽ thực hiện bằng giải tích, xuất phát từ định nghĩa (6a). Để cho đơn giản, ta chọn « cận dưới » a của tích phân là 0 ; lúc này $\Delta x = \frac{b}{n}$. Vì $x_j = j\Delta x$ và $f(x_j) = j^2(\Delta x)^2$, ta có :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (j\Delta x)^2 \Delta x = [1^2 (\Delta x)^2 + 2^2(\Delta x)^2 + \dots + n^2(\Delta x)^2].$$

$$. \Delta x = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)(\Delta x)^3.$$

Bây giờ, có thể tính giới hạn. Áp dụng công thức (xem § 2 chương 1)

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

và thay Δx bằng $\frac{b}{n}$, ta được :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{6} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Phép biến đổi sơ bộ này làm cho sự chuyền qua giới hạn được dễ dàng ; khi n tăng vô hạn thì đại lượng nghịch đảo $\frac{1}{n}$ dần tới 0, vì thế, giới hạn sẽ là $\frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{b^3}{3}$ do đó, kết quả cuối cùng sẽ là

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Áp dụng kết quả này cho diện tích từ 0 đến a, ta được :

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3};$$

Cuối cùng phép trừ các diện tích cho ta :

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

5. Các qui tắc « của phép tính tích phân ». Việc hình thành những qui tắc tổng quát nhờ đó mà các bài toán phức tạp được qui về các bài toán đơn giản hơn, mà bản thân những bài toán này lại có thể giải được gần như máy móc, là một bước quan trọng trong sự phát triển của phép tính tích phân. Đặc tính algôrit của các qui tắc đó đã được các cách biểu thị của Lâybnitx thể hiện rất rõ. Song, nếu quá tập trung vào sự máy móc

hóa lời giải các bài toán trong khi nghiên cứu giải tích thì sẽ hạ thấp rất nhiều nội dung của vấn đề và có thể dẫn đến sáo rỗng.

Người ta suy ra ngay từ định nghĩa hoặc từ thể hiện hình học của tích phân (xem như là diện tích) một số qui tắc đơn giản.

Tích phân của tổng hai hàm, bằng tổng hai tích phân của những hàm đó. Tích phân của tích một hàm với hằng số c bằng tích của số c với tích phân của hàm đó. Có thể biểu thị hai qui tắc này bằng một công thức:

$$\int_a^b [cf(x) + kg(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx \quad (9)$$

Chứng minh được suy ra trực tiếp từ định nghĩa tích phân như là giới hạn của các tổng hữu hạn (5) vì công thức cho tổng S_n tương ứng, tất nhiên sẽ đúng. Qui tắc này cũng được mở rộng cho tổng của nhiều hơn hai hàm số.

Để có một thí dụ áp dụng quy tắc đó, ta xét đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Các hệ số của nó $a_0, a_1, \dots a_n$ là hằng số. Muốn tính tích phân của hàm f(x) từ a đến b, ta sẽ tích phân từng số hạng theo quy tắc. Áp dụng công thức (7) ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = a_0(b-a) + a_1\frac{b^2-a^2}{2} + \dots a_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

Một kết quả khác được suy ra một cách hiển nhiên từ định nghĩa giải tích của tích phân cũng như từ thể hiện hình học được biểu thị bằng công thức

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (10)$$

Ngoài ra, rõ ràng tích phân cơ bản của chúng ta bằng 0, nếu b bằng a. Quy tắc

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (11)$$

nêu ở § 1 chương 8 được suy ra từ (10) khi $c = a$.

Đôi khi nên áp dụng sự kiện giá trị của tích phân không phụ thuộc vào sự lựa chọn cách gọi tên biến độc lập của hàm được tích phân. Thí dụ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt \text{ v.v..}$$

Thực vậy, việc thay thế tên gọi các tọa độ mà trên đó ta vẽ đồ thị các hàm sẽ không làm thay đổi diện tích ở dưới đường cong đã cho. Điều tương tự cũng xảy ra trong trường hợp có một sự thay thế nào đó trong bản thân hệ tọa độ. Chẳng hạn ta đưa gốc tọa độ về bên phải điểm O một đơn vị đến điểm O' (H. 265); lúc này x sẽ được thay thế bởi tọa độ mới x' theo công thức $x = 1 + x'$. Phương trình đường cong $y = f(x)$ trong hệ mới sẽ có dạng $y = f(x' + 1)$ ($y = \frac{1}{x} = \frac{1}{x' + 1}$ chẳng hạn)

Chẳng hạn, diện tích A cho trước ở dưới đường cong này (trong phạm vi từ $x = 1$ đến $x = b$) sẽ là diện tích ở dưới đường cong trong phạm vi từ $x' = 0$ đến $x' = b - 1$ đối với hệ mới. Như vậy ta sẽ có:

$$\int_1^b f(x)dx = \int_0^{b-1} f(1+x')dx'$$

và nếu viết chữ u thay cho chữ x', ta có:

$$\int_1^b f(x)dx = \int_0^{b-1} f(1 + u)du$$

Thí dụ: $$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \int_0^{b-1} \frac{1}{1+u}du. \qquad (12a)$$

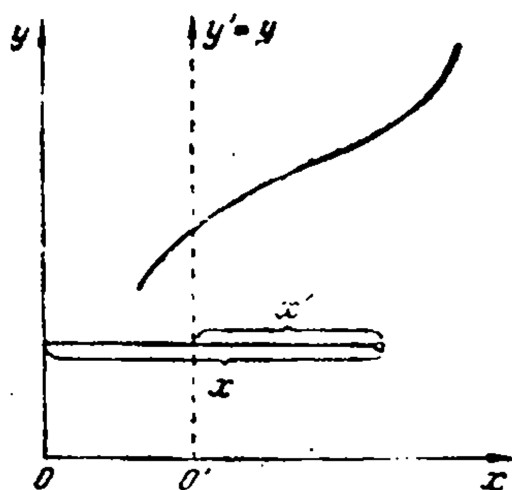
Bằng cách tương tự đối với hàm $f(x) = x^k$ ta có:

$$\int_1^b x^k dx = \int_0^{b-1} (1+u)^k\, du \qquad (12b)$$

Cũng vậy: $$\int_0^b x^k\, dx = \int_{-1}^{b-1} (1+u)^k\, du \ (k \geqslant 0). \qquad (12c)$$

Vì tích phân ở vế trái (12c) bằng $\frac{b^{k+1}}{k+1}$, ta có:

$$\int_{-1}^{b-1} (1+u)^k\, du = \frac{b^{k+1}}{k+1} \qquad (12d)$$



H. 265 – Di chuyển trục y

Cuối cùng, cần nhớ hai qui tắc quan trọng được biểu thị bởi các bất đẳng thức. Thực ra các qui tắc này sẽ cho ta những đánh giá thô thiển, nhưng rất có ích đối với các giá trị tích phân.

Giả thử $b > a$ và các giá trị của hàm $f(x)$ trong khoảng từ a đến b không vượt quá các giá trị của một hàm khác $g(x)$. Lúc này, ta có:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx. \qquad (13)$$

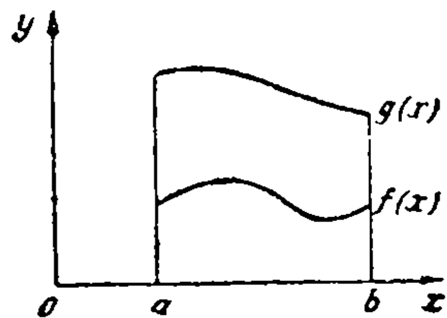
Theo H. 266 hoặc định nghĩa tích phân thì điều này là rõ ràng. Nói riêng, nếu hàm g(x) bằng M, tức là một hằng số, thì ta có:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b M dx = M(b-a);$$

từ đó suy ra bất đẳng thức:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \tag{14}$$

Nếu hàm f(x) không âm thì $f(x) = |f(x)|$. Nếu $f(x) < 0$ thì $|f(x)| > f(x)$. Do đó, nếu trong bất đẳng thức (13) ta đặt $g(x) = |f(x)|$, ta được một công thức bổ ích:



H. 266 – So sánh các tích phân

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{15}$$

Nhưng, vì $|-f(x)| = |f(x)|$, ta cũng có công thức:

$$-\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

điều này cho ta một bất đẳng thức mạnh hơn thay cho công thức (15):

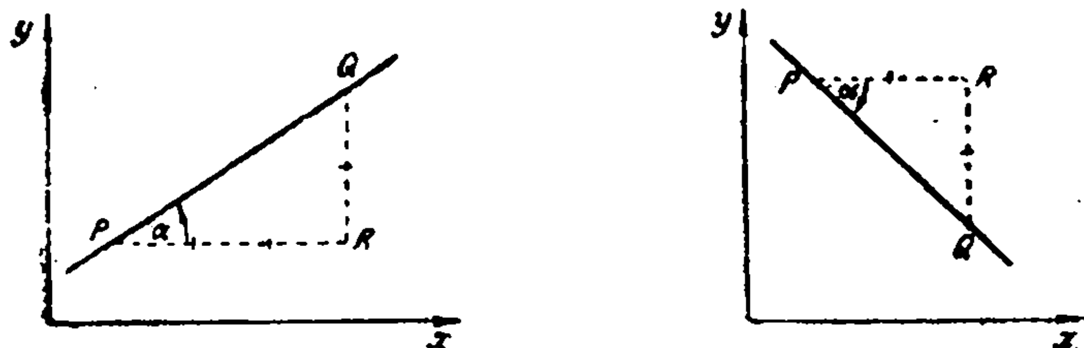
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{16}$$

§ 2 — ĐẠO HÀM.

1. Đạo hàm xem như độ dốc — Trong khi khái niệm tích phân bắt nguồn từ cổ xưa, thì một khái niệm cơ bản khác của giải tích – khái niệm đạo hàm – mới

hình thành trong thế kỷ XVII do công lao nhà bác học thiên tài Fecma và một số người khác. Phát hiện của Niutơn và Láybnitx về mối liên hệ hữu cơ giữa hai khái niệm tưởng chừng như rất khác nhau đó đã tạo ra sự phát triển chưa từng thấy của khoa học toán học. Fecma đã nghiên cứu vấn đề xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số y = f(x). Khi nghiên cứu đồ thị của một hàm, ta qui ước gọi điểm ở vị trí cao hơn tất cả các điểm khác là cực đại, điểm ở vị trí thấp hơn tất cả các điểm khác là cực tiểu. Điểm B (trên H. 191 § 3 chương 7) là cực đại, điểm C là cực tiểu. Khi tìm cực đại và cực tiểu tất nhiên ta dùng đến khái niệm tiếp tuyến với đường cong. Giả thiết đường cong không tạo nên những góc nhọn, không có những đặc điểm gì khác và tại mọi điểm có hướng xác định bởi đường tiếp tuyến. Tại các điểm cực đại và cực tiểu, tiếp tuyến với đường cong y = f(x) phải song song với trục x, nếu trái lại thì tại lân cận những điểm đó, đường cong hoặc đi lên hoặc đi xuống. Điều chú ý này gợi ta nghiên cứu vấn đề tổng quát về việc xác định phương của tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại một điểm P tùy ý của nó.

Muốn xác định phương của một đường thẳng trong mặt phẳng x, y ta thường xác định *độ dốc* của nó, đó chính là tang của góc α giữa hướng dương của trục x



H. 267 — Độ dốc các đường thẳng

và đường thẳng. Nếu P là một điểm nào đó của đường thẳng L, ta đi về bên phải nó đến một điểm R nào đó, rồi đi lên (hoặc đi xuống) cho tới một điểm Q nằm trên đường thẳng L thì độ dốc của L bằng tgα, tức là $\frac{RQ}{PR}$.
Đoạn PR được giả thiết là dương, đoạn RQ là dương hoặc âm tùy theo nó hướng lên trên hoặc hướng xuống dưới; như vậy, độ dốc sẽ cho ta độ tăng hoặc độ giảm trên một đơn vị dài theo phương nằm ngang (khi chuyển dịch theo đường thẳng từ trái sang phải). Trên hình 267, độ dốc của đường thứ nhất bằng $\frac{2}{3}$, độ dốc của đường thẳng thứ hai bằng — 1.

Ta hiểu độ dốc của *đường cong* tại điểm P là độ dốc của *tiếp tuyến* với đường cong tại điểm đó. Vì ta đã thừa nhận khái niệm tiếp tuyến như một khái niệm trực giác cho trước, trước mắt ta chỉ còn bài toán — *tìm phương pháp tính độ dốc của đường cong.* Việc phân tích các bài toán liên quan đến vấn đề đó sẽ được nêu trong phần phụ lục chương này.

2. **Đạo hàm xem như giới hạn.** Việc chỉ xem xét đường cong $y = f(x)$ tại một điểm $P(x,y)$ không cho phép ta tính độ dốc của đường cong tại điểm đó. Cần phải dựa vào quá trình giới hạn giống như quá trình tính diện tích. Quá trình giới hạn này là cơ sở của phép tính vi phân. Xét một điểm P_1 khác ở trên đường cong khá gần điểm P có các tọa độ x_1, y_1; gọi t_1 là đường thẳng đi qua các điểm P và P_1; đường thẳng này là cát tuyến của đường cong, nó khác rất ít với đường tiếp tuyến tại điểm P, nếu điểm P_1 gần điểm P. Gọi góc giữa trục x và đường thẳng t_1 là α_1. Bây giờ ta buộc x_1 dần tới x; lúc đó điểm P_1 sẽ chuyển động trên đường cong tới điểm P và cát tuyến t_1 sẽ dần tới một vị trí

giới hạn, đó chính là tiếp tuyến t với đường cong đã cho tại điểm x. Nếu gọi α là góc giữa trục x và tiếp tuyến t, thì khi $x_1 \to x$ ta có:

$$y_1 \to y,\ P_1 \to P,\ t_1 \to t \text{ và } \alpha_1 \to \alpha$$

*Tiếp tuyến là giới hạn của cát tuyến, độ dốc của tiếp tuyến là giới hạn độ dốc của cát tuyến.**

Độ dốc của cát tuyến t_1 được cho bởi công thức:

$$\text{độ dốc } t_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x};$$

nếu biểu thị phép toán lập số gia bởi ký hiệu Δ, ta có:

$$\text{độ dốc } t_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Độ dốc của cát tuyến t_1 là «tỉ số các số gia» — số gia Δy của hàm chia cho số gia Δx của biến độc lập. Ta có độ dốc t = giới hạn của độ dốc $t_1 = \lim \dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x} =$

$= \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, trong đó giới hạn được tính khi $x_1 \to x$

tức là khi $\Delta x = (x_1 - x) \to 0$.

Tiếp tuyến t với một đường cong cho trước có độ dốc bằng giới hạn của tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *khi* $\Delta x = x_1 - x$ *dần tới 0.*

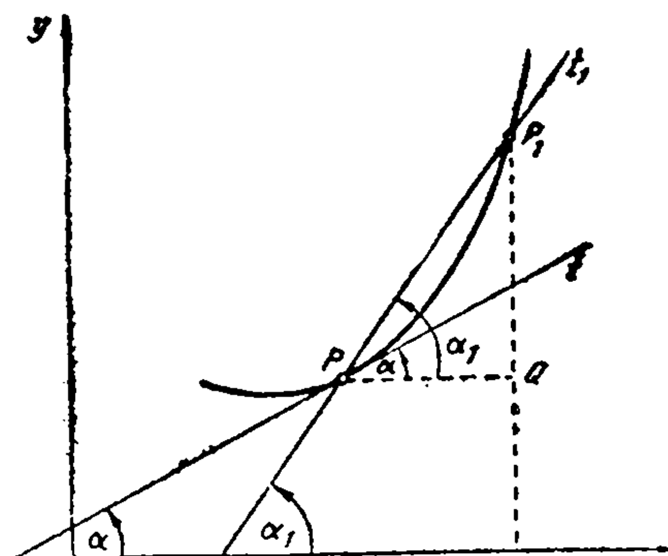
Hàm f(x) ban đầu cho «độ cao» của các điểm khác nhau của đường cong $y = f(x)$. Bây giờ ta giả thiết điểm P chuyển động theo đường cong $y = f(x)$. Khi đó độ dốc tại điểm P sẽ là một hàm mới của x mà ta ký

---

* Ở đây các ký hiệu có khác chút ít với các ký hiệu ở chương VI, vì chúng ta có $x \to x_1$, trong đó x_1 không đổi. Không có sự nhầm lẫn nào xảy ra do có sự thay đổi đó.

hiệu là f'(x) và gọi tên là *đạo hàm* của hàm f(x).

Quá trình giới hạn nhờ đó ta tìm được đạo hàm được gọi là phép vi phân hàm f(x). Quá trình này là một phép toán cho ứng với hàm f(x) đã cho một hàm khác f'(x) nào đó theo một quy tắc nhất định. Tương tự như vậy, khi định nghĩa bản thân hàm f(x) ta đã xác lập một qui tắc cho ứng với mỗi giá trị của biến x với một giá trị nào đó của hàm f(x). Vậy:



H. 268 — Đạo hàm xem như giới hạn

f(x) là độ cao của đường cong y = f(x) tại điểm x,

f'(x) là độ dốc của đường cong y = f(x) tại điểm x.

$$f'(x) = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (1)$$

khi $x_1 \to x$.

Ta còn thường dùng một ký hiệu khác là:

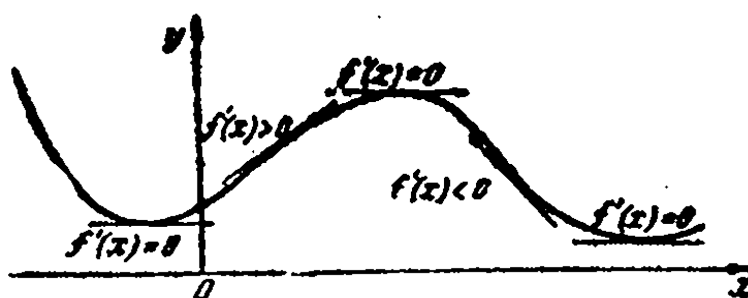
$$f'(x) = Df(x),$$

trong đó ký hiệu D là chữ đầu của từ differentia có nghĩa là « số gia »: đối với đạo hàm y = f(x) còn có ký hiệu của Lâybnitx

$$\frac{dy}{dx}, \text{ hoặc } \frac{df(x)}{dx},$$

mà ta sẽ xét đến ở §4 với ngụ ý rằng đạo hàm được tính như giới hạn của tỉ số các số gia $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hoặc $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Nếu qui ước chuyển động theo đường cong được thực hiện theo chiều tăng của x, ta có thể kết luận: đạo hàm tại một điểm nào đó dương ($f'(x) > 0$) tức là đường cong đi lên (giá trị y tăng). Trái lại, đạo hàm âm ($f'(x) < 0$), tức là đường cong đi xuống (giá trị y giảm); cuối cùng, nếu đạo hàm triệt tiêu ($f'(x) = 0$) thì đường cong có phương nằm ngang tại giá trị tương ứng của x. Tại các điểm cực đại và cực tiểu, độ dốc phải bằng 0 (H. 269). Như vậy, khi giải phương trình $f'(x) = 0$ đối với x ta tìm được các vị trí cực đại và cực tiểu như lần đầu tiên Fecma đã làm.



H. 269 – Dấu của đạo hàm

3. *Các ví dụ.* Có thể làm sáng tỏ rằng các lập luận dẫn đến định nghĩa (1) đã mất ý nghĩa thực tiễn của nó. Thực vậy, một bài toán đã được thay thế bằng một bài toán khác: đáng lẽ tìm độ dốc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại một điểm nào đó, ta phải tính giới hạn (1) mà thoạt nhìn thì khó thấy là tương đương với nhau. Nhưng nếu ta không xét dạng tổng quát mà xét những hàm riêng biệt thì ta sẽ được những kết quả rất hiện thực.

Hàm đơn giản nhất là hàm $f(x) = c$, trong đó c không đổi. Đồ thị của hàm này $y = f(x) = c$ là đường thẳng nằm trùng với mọi tiếp tuyến của nó; tất nhiên, đối với mọi x ta có hệ thức: $f'(x) = 0$.

Điều này cũng suy ra được từ định nghĩa (1); thực vậy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(f x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{c - c}{x_1 - x} = \frac{0}{x_1 - x} = 0.$$

Như vậy ta có kết quả hiển nhiên:

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 0 \text{ khi } x_1 \to x$$

Tiếp sau đó, ta xét hàm đơn giản $y = f(x) = x$ mà đồ thị là đường phân giác của góc vuông thứ nhất. Về mặt hình học thì rõ ràng đối với mọi x: $f'(x) = 1$; định nghĩa giải tích (1) lại cho:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$$

tức là

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 1 \text{ khi } x_1 \to x.$$

Một thí dụ không thông thường đơn giản nhất là phép vi phân hàm $y = f(x) = x^2$, mà thực chất là tìm độ dốc của parabol. Đây là một thí dụ đơn giản nhất mà qua đó ta học được cách chuyển qua giới hạn mà thoạt tiên tưởng như kết quả chưa được rõ. Ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}$$

Nếu ta cho qua giới hạn trực tiếp ở tử và mẫu thì được biểu thức vô nghĩa $\frac{0}{0}$. Nhưng, có thể tránh được khó khăn đó nếu giản ước cho thừa số $x_1 - x$ *trước khi cho qua giới hạn* (việc giản ước như thế là đúng, bởi vì khi tính giới hạn của tỉ số các số gia ta đã coi như $x \neq x_1$ (xem §3 chương 6). Như vậy ta có kết quả:

$$\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = \frac{(x_1 + x)(x_1 - x)}{x_1 - x} = x_1 + x.$$

Sau khi giản ước, việc tìm giới hạn khi $x \to x_1$ không có khó khăn gì. Giới hạn này được tìm bằng « phép thế » đơn giản vì tỉ số các số gia dưới dạng mới $x_1 + x$ là liên tục, còn giới hạn của hàm liên tục khi $x_1 \to x$

là giá trị của hàm tại $x_1 = x$; trong thí dụ này, ta có trực tiếp $x + x = 2x$; do đó, nếu $f(x) = x^2$ thì $f'(x) = 2x$.

Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh rằng trong trường hợp $f(x) = x^3$, ta có $f'(x) = 3x^2$

Thực vậy, tỉ số :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x}$$

giản ước được theo công thức :

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2)$$

mẫu số $x = x_1$ — được ước lược đi, ta có biểu thức liên tục :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2.$$

khi x_1 dần tới x thì biểu thức này dần tới tổng

$$x^2 + x^2 + x^2.$$

Vậy ta có :

$$f'(x) = 3x^2.$$

Tổng quát, đối với hàm $f(x) = x^n$ (n nguyên dương), đạo hàm sẽ có dạng : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Sau đây là một thí dụ cho phép tính trực tiếp đạo hàm.

$$\text{Xét hàm } y = f(x) = \frac{1}{x}.$$

ta có :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x_1 - x} = \frac{x - x_1}{x_1 x} \cdot \frac{1}{x_1 - x}$$

Rút gọn phân thức ta được : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x}$. Đây là một biểu thức liên tục tại điểm $x_1 = x$. Do đó, ta có :

$$f'(x) = -\frac{1}{x_2}.$$

Tất nhiên, trong trường hợp này thì cả đạo hàm và bản thân hàm đều không xác định tại điểm $x = 0$.

Bây giờ ta tính đạo hàm của hàm:

$$y = f(x) = \sqrt{x},$$

Trong tỉ số số gia ta thu được:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x}$$

Dùng công thức $x_1 - x = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})$, có thể ước lược mẫu số và được một biểu thức liên tục tại điểm $x_1 = x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

Chuyển qua giới hạn, ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. Đạo hàm của các hàm lượng giác: Bây giờ ta xét đến một vấn đề quan trọng — vấn đề tính đạo hàm của các *hàm lượng giác*. Trước hết, ta quy ước sẽ chỉ đo góc bằng radian.

Muốn lấy đạo hàm của $y = f(x) = \sin x$ ta đặt $x_1 - x = h$ tức là $x_1 = x + h$ và $f(x_1) = \sin x_1 = \sin(x + h)$. Áp dụng công thức lượng giác cho sin của tổng hai góc ($\sin(A + B)$) ta có:

$$f(x_1) = \sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Từ đó:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \cos x . \left(\frac{\sin h}{h}\right) +$$

$$+ \sin x . \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right).$$

Nếu x_1 dần tới x thì h dần tới 0, sinh dần tới 0 còn cosh dần tới 1. Sau đó áp dụng các kết quả đã biết về phép tính giới hạn (xem § 3 chương 6) ta có:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ và } \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{1} = 0.$$

Do đó, vế phải của hệ thức (2) dần tới cosx. Kết quả cuối cùng: hàm f(x) = sinx có đạo hàm là f'(x) = cosx, hoặc gọn hơn: $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$.

Muốn tính đạo hàm của hàm số f (x) = tgx, ta viết $\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, sau đó tìm được:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h} \cdot \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} =$$

$$= \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

Đẳng thức cuối cùng này thu được nhờ công thức sin(A—B) = sinA cosB — cosA sinB, trong đó A = x+h và B = x. Nếu h dần tới 0 thì $\frac{\sin h}{h}$ dần tới 1, cos(x+h) dần tới cosx, do đó ta có kết luận: Đạo hàm của hàm f(x) = tgx là hàm $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ hoặc $\frac{d(\text{tg}x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. Tính khả vị và tính liên tục: *Điều kiện cần cho tính khả vị của một hàm nào đó là tính liên tục của nó.*

Thật vậy, nếu giới hạn của tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại thì rõ ràng số gia Δy của hàm f(x) phải trở nên nhỏ vô cùng khi Δx dần tới 0. Mỗi hàm khả vi tất yếu phải liên tục, vì

thế, nếu trong chương này ta gặp các hàm khả vi thì ta luôn nhớ rằng chúng được giả thiết là liên tục hoặc phải chứng minh tính liên tục của chúng.

6. Đạo hàm và vận tốc. Đạo hàm bậc hai và gia tốc. Cho đến nay, chúng ta đã liên kết khái niệm đạo hàm với biểu tượng hình học về đồ thị của hàm. Song, thật là một sai lầm thô thiển nếu chỉ hạn chế vai trò khái niệm đạo hàm trong những bài toán tính độ dốc của tiếp tuyến với đường cong cho trước. Với quan điểm khoa học thì các bài toán tính vận tốc biến thiên của một đại lượng biến thiên $f(t)$ nào đó trong khoảng thời gian t còn là quan trọng hơn. Chính từ hướng này mà Niutơn đã đi đến phép tính vi phân. Nói riêng, Niutơn đã phân tích hiện tượng vận tốc, xem thời gian và vị trí của động tử như các đại lượng biến thiên (theo cách diễn đạt của Niutơn gọi là « fluent »). Khi một động tử nào đó chuyển động dọc theo trục x thì chuyển động của nó hoàn toàn được xác định bằng cách cho một hàm $x = f(t)$ và chỉ ra vị trí của động tử x tại một thời điểm t bất kỳ. « Chuyển động đều » với vận tốc b không đổi dọc theo trục x được xác định bởi hàm tuyến tính $x = a + bt$, trong đó a là vị trí của động tử tại thời điểm ban đầu ($t = 0$).

Chuyển động của một động tử trên mặt phẳng được mô tả bởi hai hàm: $x = f(t)$, $y = g(t)$; những hàm này xác định các tọa độ của phần tử xem như các hàm của thời gian. Trường hợp riêng, một chuyển động đều sẽ tương ứng với hai hàm tuyến tính: $x = a + bt$, $y = c + dt$; trong đó b và d là hai « thành phần » của vận tốc không đổi, còn a và c là các tọa độ của vị trí ban đầu của động tử (khi $t = 0$); quỹ đạo của động tử là một đường thẳng mà phương trình là: $(x - a)d - (y - c)b = 0$. Phương trình này thu được bằng cách khử t từ hai hệ thức ở trên.

Nếu phần tử chuyển động chỉ dưới tác dụng của trọng lực trong mặt phẳng thẳng đứng x, y thì chuyển động của nó (đã chứng minh trong vật lý sơ cấp) được xác định bởi hai phương trình: $x = a + bt$, $y = c + dt = \frac{1}{2}gt^2$; trong đó a, b, c, d là các đại lượng không đổi phụ thuộc vào trạng thái của phần tử tại thời điểm ban đầu, g là gia tốc trọng trường (gần bằng 9,81) nếu thời gian tính bằng giây. Và khoảng cách tính bằng mét. Ta có được quỹ đạo của chuyển động bằng cách khử t từ hai phương trình đã cho. Đó là parabol

$$y = c + \frac{d}{b}(x - a) - \frac{1}{2}g\frac{(x - a)^2}{b^2}, \text{ nếu } b \neq 0;$$

Ngược lại, nếu b = 0 thì quĩ đạo là một đoạn của trục tung

Nếu một động tử buộc phải chuyển động theo một đường cong nào đó (tương tự xe lửa chạy trên đường ray) thì chuyển động có thể được xác định bởi hàm s(t) (hàm của thời gian t) bằng độ dài cung s tính theo đường cong đã cho từ một điểm P_0 ban đầu nào đó đến vị trí của động tử tại điểm P ở thời điểm t. Thí dụ, nếu đề cập đến đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$ thì hàm $s = ct$ xác định trên đường tròn một chuyển động quay đều với vận tốc c.

Mục tiêu đầu tiên mà Niutơn đề ra là tìm vận tốc của động tử chuyển động không đều. Để cho đơn giản, ta xét chuyển động của động tử dọc theo một đường thẳng nào đó cho bởi hàm $x = f(t)$. Nếu chuyển động là đều tức là được thực hiện với vận tốc không đổi thì có thể tìm được vận tốc này bằng cách lấy hai thời điểm t và t_1 và những vị trí tương ứng $f(t)$ và $f(t_1)$ của động tử, rồi lập tỉ số:

$$v = \text{vận tốc} = \frac{\text{khoảng cách}}{\text{thời gian}} = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{f(t)_1 - f(t)}{t_1 - t}. \quad (2)$$

Chẳng hạn, nếu t tính bằng giờ, x tính bằng kilômét thì khi $t_1 - t = 1$, hiệu $x_1 - x$ sẽ là số kilômét đi được sau 1 giờ, v là vận tốc (tính bằng km/giờ). Ta nói rằng vận tốc là đại lượng không đổi vì tỉ số:

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} \qquad (3)$$

không thay đổi với mọi giá trị của t và t_1. Nhưng nếu chuyển động là không đều (chẳng hạn khi vật rơi tự do, vận tốc tăng lên khi rơi) thì tỉ số (3) không cho các giá trị của vận tốc tại thời điểm t mà chỉ biểu thị vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến t_1. Muốn tìm vận tốc tại *thời điểm t* thì phải tính giới hạn của vận tốc trung bình khi t_1 dần tới t. Vậy, theo Niutơn thì ta xác định vận tốc như sau:

$$\text{Vận tốc ở thời điểm } t = \lim \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = f'(t) \qquad (4)$$

Nói cách khác, vận tốc là đạo hàm của đường đi (của tọa độ của động tử trên đường thẳng) theo thời gian, hoặc « vận tốc biến thiên tức thời » của đường đi theo thời gian và ngược lại vận tốc biến thiên trung bình được xác định theo công thức (3).

Vận tốc biến thiên của chính vận tốc được gọi là gia tốc: gia tốc, nói đơn giản là đạo hàm của đạo hàm thường được ký hiệu bởi f'' (t) và gọi là *đạo hàm bậc hai* của hàm f(t). Galilê đã nhận xét rằng, khoảng cách thẳng đứng x mà vật đi được khi rơi tự do trong một khoảng thời gian t được biểu thị bằng công thức

$$x = f(t) = \frac{1}{2} g t^2, \qquad (5)$$

trong đó g là gia tốc trọng trường. Từ công thức (5), bằng cách lấy đạo hàm ta có được vận tốc v của vật tại thời điểm t. Vận tốc này được biểu thị bởi công thức $v = f'(t) = gt$ (6)

còn gia tốc a không đổi được biểu thị bởi công thức

$$a = f''(t) = g.$$

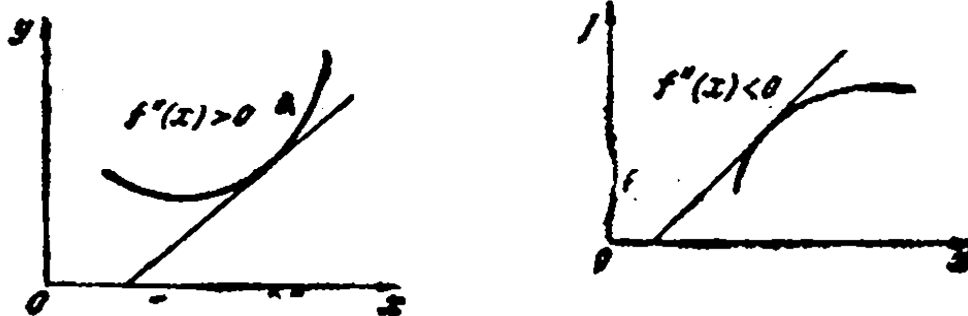
Ta giả thiết cần tìm vận tốc của vật 2 giây sau khi bắt đầu rơi. Đầu tiên ta tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 2,1$:

$$\frac{\frac{1}{2}g.(2,1)^2 - \frac{1}{2}g.2^2}{2,1-2} = \frac{4,905.0,41}{0,1} = 20,11 \quad (m/sec).$$

Đặt trong công thức (6) giá trị $t = 2$, ta được vận tốc tức thời ở cuối giây thứ hai là 19,62 (m/sec).

Trong chuyển động của một điểm trên mặt phẳng, hai đạo hàm $f'(t)$ và $g'(t)$ của hai hàm $x = f(t)$ và $y = g(t)$ sẽ xác định ra các thành phần của vận tốc. Trong chuyển động dọc theo một đường cong cho trước, vận tốc phải được xác định như đạo hàm của hàm $s = f(t)$ trong đó s là độ dài cung.

7. Ý nghĩa hình học của đạo hàm bậc hai. Đạo hàm bậc hai $f''(x)$ cũng có ý nghĩa quan trọng trong giải tích và trong hình học. Thực vậy, là vận tốc biến thiên của độ dốc $f'(x)$ của đường cong $y = f(x)$, đạo hàm bậc hai chỉ sự lồi lõm của đường cong. Nếu trong một khoảng nào đó đạo hàm bậc hai lớn hơn 0 thì vận tốc biến thiên của độ dốc $f'(x)$ là dương. Dấu dương của vận tốc biến thiên của một hàm nào đó chỉ



H. 270 — 271. Sự lõm và lồi của đường cong

rằng hàm đó tăng khi đối số x tăng. Do đó, bất đẳng thức $f''(x) > 0$ chứng tỏ độ dốc $f'(x)$ là hàm tăng của x, nghĩa là khi x tăng, thì đường cong sẽ dựng đứng hơn ở chỗ mà độ dốc của nó dương, và sẽ thoai thoải hơn ở chỗ mà độ dốc âm. Ta qui ước nói rằng, trong trường hợp đó đường cong là lõm (H. 270). Tương tự, nếu $f'(x) < 0$ thì ta nói rằng đường cong $y = f(x)$ là lồi (H. 271).

Parabol $y = f(x) = x^2$ lõm ở khắp nơi vì đạo hàm bậc hai của nó ($f''(x) = 2$) luôn dương. Đường cong $y = f(x) = x^3$ lõm khi $x > 0$ và lồi khi $x < 0$ (H. 153); điều này thể hiện ở đạo hàm bậc hai của nó $f''(x) = 6x$. bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng. Mặt khác, khi $x = 0$ ta có $f'(x) = 3x^2 = 0$ (nhưng không có cực đại và cực tiểu), và $f''(x) = 0$ khi $x = 0$. Điểm này được gọi là *điểm uốn*. Tại những điểm như vậy, tiếp tuyến (trong trường hợp trục x đã cho) sẽ cắt đường cong.

Nếu s biểu thị độ dài cung của đường cong, α là độ dốc thì hàm $\alpha = h(s)$ là hàm của biến s. Khi di chuyển điểm theo đường cong thì hàm $\alpha = h(s)$ sẽ thay đổi. Vận tốc $h'(s)$ của sự biến thiên được gọi là *độ cong* của đường cong tại điểm mà độ dài cung bằng s. Ta nhấn mạnh nhưng không chứng minh rằng độ cong k có thể biểu thị được nhờ đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm $y = f(x)$ theo công thức sau đây:

$$k = f''(x) : (1 + (f'(x)^2))^{3/2}$$

8. Cực đại và cực tiểu. Muốn tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f(x) cho trước, đầu tiên ta phải tính đạo hàm $f'(x)$ của nó, sau đó tìm những giá trị x tại đó đạo hàm triệt tiêu và, cuối cùng nghiên cứu xem tại những điểm nào trong số những điểm đó hàm có cực đại và cực tiểu. Vấn đề sau cùng có thể giải quyết được

nhờ đạo hàm bậc hai $f''(x)$, dấu của nó chỉ rõ tính lồi hoặc tính lõm của đồ thị đường cong. Nếu đạo hàm bậc hai triệt tiêu thì thông thường ta có điểm uốn, khi đó không có cực trị. Chú ý đến dấu của đạo hàm bậc nhất và bậc hai, không những ta có thể tìm được cực trị của hàm mà còn xác định được dạng đồ thị của nó. Phương pháp đã nêu cho phép ta tách ra những giá trị x tại đó hàm có cực trị. Muốn tìm những giá trị tương ứng của bản thân hàm $y = f(x)$, cần thay thế những giá trị x tìm được vào biểu thức $f(x)$.

Để làm thí dụ, ta xét đa thức:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1;$$

các đạo hàm của nó là:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12,$$

$$f''(x) = 12x - 18.$$

Phương trình bậc hai $f'(x) = 0$ có các nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, tại những điểm này giá trị của đạo hàm bậc hai bằng $f''(x_1) = -6 < 0$, $f''(x_2) = 6 > 0$. Do đó, hàm $f(x)$ có cực đại $f(x_1) = 6$ và có cực tiểu $f(x_2) = 5$.

§3. KỸ THUẬT TÍNH ĐẠO HÀM

Từ trước đến giờ, chúng ta đã cố gắng tính đạo hàm của một loạt các hàm riêng biệt dựa vào dạng được chọn của tỉ số số gia. Bước tiến quan trọng trong những công trình nghiên cứu của Niutơn, Lâybnitx và những người kế tục họ là đã thay thế được những thủ thuật cá biệt rời rạc đó bằng những phương pháp tổng quát có hiệu lực hơn. Nhờ những phương pháp này gần như có thể tính đạo hàm một hàm bất kỳ trong số những hàm thường gặp trong toán học mà chỉ cần dựa vào một số ít các qui tắc đơn giản và biết áp dụng chúng. Tập hợp những biện pháp đó tạo ra tính chất « algôrit » của việc tính toán.

Chúng ta không thể đi sâu vào kỹ thuật này. Chỉ nêu ra ở đây một số ít qui tắc đơn giản nhất.

a) Đạo hàm của tổng. Nếu a và b là những số không đổi và hàm k(x) được cho bởi công thức:

$$k(x) = af(x) + bg(x),$$

thì tự bạn đọc sẽ chứng minh được dễ dàng điều sau đây là đúng:

$$k'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Một qui tắc tương tự cũng đúng với một số số hạng tùy ý.

b) Đạo hàm của tích. Đạo hàm của tích $p(x) = f(x) \times g(x)$ được biểu thị bởi công thức:

$$p'(x) = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x).$$

Có thể chứng minh dễ dàng điều này. Ta vừa thêm và bớt vào $p(x+h) - p(x)$ cùng một biểu thức $f(x+h)\, g(x)$:

$$\begin{aligned} p(x+h) - p(x) &= f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x) = \\ &= f(x+h)\, g(x+h) - f(x+h)\, g(x) + \\ &+ f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x). \end{aligned}$$

Kết hợp hai số hạng đầu và hai số hạng cuối, ta có:

$$\frac{p(x+h) - p(x)}{h} = f(x+h)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bây giờ cho h dần tới 0. Vì $f(x+h)$ dần tới $f(x)$ cho nên điều khẳng định ở trên đã được chứng minh.

Nhờ các qui tắc a/ và b/, có thể tính đạo hàm một đa thức bất kỳ $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; đạo hàm của nó là $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$.

Để làm một áp dụng, ta có thể chứng minh công thức nhị thức (§ 2 chương 1). Theo công thức đó thì lũy thừa của một nhị thức $(1+x)^n$ được phân tích thành một đa thức có dạng như sau:

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (1)$$

trong đó hệ số a_k được cho bởi công thức

$$a_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Ta đã thấy rằng (§ 2 chương 8) đạo hàm vế trái của công thức (1) là $n(1+x)^{n-1}$. Dựa vào mục trước thì:

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \qquad (3)$$

Nếu đặt $x = 0$ vào công thức này thì ta được $n = a_1$ phù hợp với công thức (2) khi $k = 1$. Lấy đạo hàm công thức (3) một lần nữa, ta có:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 3\ 2a_3x + \dots$$
$$\dots + n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Thay $x = 0$ vào công thức này ta có $2a_2 = n(n-1)$ phù hợp với công thức (2) khi $k = 2$.

c) *Đạo hàm của thương.* Nếu $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ thì

$$q'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Đề nghị bạn đọc tự chứng minh để luyện tập. Tất nhiên, cần giả thiết $g(x) \neq 0$.

Bây giờ ta đã biết tính đạo hàm của một hàm là tỉ số của hai đa thức. Thí dụ $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ có đạo hàm là

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

d) *Đạo hàm của các hàm ngược.* Nếu các hàm $y = f(x)$ và $x = g(y)$ là ngược nhau (chẳng hạn $y = x^2$ và $x = \sqrt{y}$) thì đạo hàm của một hàm này là nghịch đảo của đạo hàm của hàm kia. Tức là:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Để chứng minh khẳng định này nếu ta để ý đến sự nghịch đảo của các tỷ số các số gia $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; điều này cũng thể hiện rõ qua minh họa hình học của các hàm ngược nêu ở §1 chương VI, nếu xét độ dốc của tiếp tuyến với trục y chứ không phải đối với trục x.

Để làm thí dụ, ta tính đạo hàm của $y = f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, là hàm ngược với hàm $x = y^m$ (xem lập luận đầy đủ hơn cho trường hợp $m = \frac{1}{2}$ ở § 2 chương 8. Vì hàm $x = y^m$ có đạo hàm là my^{m-1}, cho nên:

$$f'(x) = \frac{1}{my^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{y}{y^m} = \frac{1}{m} yy^{-m}$$

Nếu thay $y = x^{\frac{1}{m}}$ và $y^{-m} = x^{-1}$ ta có

$$f'(x) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1}$$

Để làm thí dụ sau cùng, ta lấy đạo hàm của *hàm lượng giác ngược* (xem § 1 chương 6) $y = \text{arctg}x$ (tương đương với $x = \text{tg}y$). Muốn bảo đảm tính xác định đơn trị của hàm y, ta giả thiết biến y biểu thị độ đo góc bằng radian giới hạn trong khoảng $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Ta biết rằng $\frac{d(\text{tg}y)}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$. Vì

$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$, cho nên

có thể kết luận $f(x) = \frac{d(\text{arctg}x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Cũng tương tự như vậy, bạn đọc có thể rút ra những công thức sau đây:

$$\frac{d(\mathrm{arctg}\ x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuối cùng, ta đi đến một qui tắc quan trọng sau đây:

c) *Đạo hàm của các hàm hợp.* Các hàm hợp bao gồm hai (hoặc nhiều hàm) đơn giản. Thí dụ, hàm $z = \sin\sqrt{x}$ gồm các hàm $z = \sin y$ và $y = \sqrt{x}$; hàm $z = \sqrt{x} + \sqrt{x^5}$ gồm các hàm $z = y + y^5$ và $y = \sqrt{x}$; hàm $z = \sin(x^2)$ gồm các hàm $z = \sin y$ và $y = x^2$; hàm $z = \sin\frac{1}{x}$ gồm các hàm $z = \sin y$ và $y = \frac{1}{x}$.

Nếu trong hai hàm cho trước $z = g(y)$ và $y = f(x)$ ta thay thế hàm thứ hai vào hàm thứ nhất, ta sẽ được hàm hợp

$$z = k(x) = g[f(x)]$$

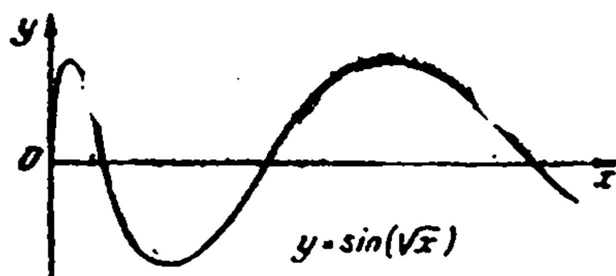
Ta sẽ chứng minh công thức $k'(x) = g'(y) \,.\, f'(x)$ (4)

Muốn vậy ta lập tỷ số:

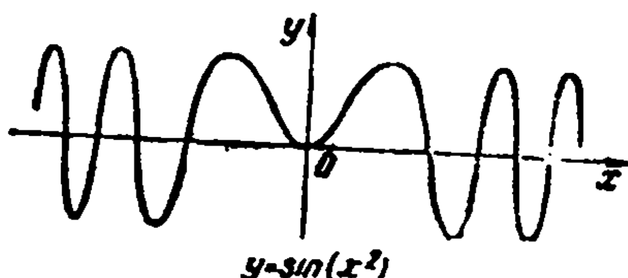
$$\frac{k(x_1) - k(x)}{x_1 - x} = \frac{z_1 - z}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

trong đó $y_1 = f(x_1)$ và $z_1 = g(y_1) = k(x_1)$. Khi x_1 dần tới x, vế trái dần tới $k'(x)$, hai thừa số ở vế phải theo

thứ tự dẫn tới $g'(y)$ và $f'(x)$. Công thức (4) đã được chứng minh. Trong chứng minh này cần điều kiện $y_1 - y \neq 0$. Thực vậy, ta đã chia cho $\Delta y = y_1 - y$, vì thế, cần loại ra những giá trị của x_1 tại đó $y_1 - y = 0$. Song công thức (4) vẫn còn đúng trong trường hợp Δy bằng 0 ở trong một khoảng bao quanh điểm x. Trong giả thiết đó y giữ nguyên không đổi tức là $f'(x) = 0$; mặt khác, cả $k(x) = g(y)$ cũng không đổi đối với x (vì y không thay đổi khi x thay đổi), do đó $k'(x) = 0$; như vậy, công thức (4) cũng đúng trong trường hợp này



H. 272 — $y = \sin(\sqrt{x})$



H. 273 — $y = \sin(x^2)$

Bạn đọc nên kiểm tra lại các thí dụ sau đây;

$$k(x) = \sin\sqrt{x},\quad k'(x) = (\cos\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^5}.$$

$$k'(x) = (1 + 5x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$k(x) = \sin(x^2),\qquad k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$k(x) = \sin\frac{1}{x}\qquad k'(x) = -\cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$k(x) = \sqrt{1 - x^2}\qquad k'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Bây giờ đã có thể nhấn mạnh rằng mọi công thức có liên quan đến các lũy thừa của x có thể hợp nhất lại thành một công thức chung.

Với mọi r hữu tỉ dương hoặc âm, hàm $f(x) = x^r$ có đạo hàm $f'(x) = rx^{r-1}$

§4. CÁC KÝ HIỆU CỦA LÂYBNITX VÀ CÁC « VÔ CÙNG BÉ »

Niutơn và Lâybnitx đã tìm tích phân và đạo hàm như là các giới hạn. Nhưng những cơ sở cơ bản nhất của giải tích mà từ lâu vẫn chưa được làm sáng tỏ là ở chỗ chưa muốn thừa nhận cái đặc quyền của khái niệm giới hạn được xem là nguồn gốc của những phương pháp mới. Cả Niutơn lẫn Lâybnitx đều đã không thể giữ được lập trường rõ ràng đó, điều mà hiện nay đối với chúng ta là đơn giản và tự nhiên khi khái niệm giới hạn đã hoàn toàn sáng tỏ. Điều đó đã ngự trị hơn một thế kỷ, khoảng thời gian mà bản chất của vấn đề đã bị làm mờ đi bằng những lập luận vô ích về các « đại lượng vô cùng bé », về các « vi phân », về « tỷ số cuối cùng » v.v... Sự khiên cưỡng của các khái niệm mà rút cục đã bị bác bỏ có căn nguyên sâu xa ở trong các khái niệm triết học thời đó và trong bản chất tư duy của con người. Dường như có thể lập luận như sau: tất nhiên, tích phân và đạo hàm có thể xem như là các giới hạn. Nhưng rút cục thì những sự vật đó « tự thân » là sự chuyển qua giới hạn, độc lập đối với phương pháp đặc thù để mô tả chúng. Những khái niệm có tính chất trực giác như diện tích hoặc độ dốc của đường cong hình như có một ý nghĩa tuyệt đối « tự thân » mà không cần thiết phải đưa vào những đa giác nội tiếp hoặc những cát tuyến và giới hạn của chúng. Tất nhiên, xét về quan điểm tâm lý học thì ý muốn hình thành các định nghĩa thích hợp về diện tích hoặc độ dốc của một đường cong như « vật tự thân » là hoàn toàn có lý. Song với những mục tiêu

chín chắn nhằm mở đường đi tới sự tiến bộ thực sự của tư tưởng, cần phải từ bỏ ý muốn đó và nhìn nhận chúng với sự chuyển qua giới hạn trong một định nghĩa thống nhất, thừa nhận được về mặt ý nghĩa khoa học. Trong thế kỷ thứ XVII đã không có những truyền thống về mặt tinh thần cho phép có được một sự thay đổi về cơ bản như vậy.

Ý định của Lâybnitx là « giải thích » đạo hàm trong mối liên hệ trực tiếp và hoàn hảo với các ký hiệu mà ông đã đưa ra đối với tỷ số các số gia của hàm f(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Giới hạn của tỷ số này tức là đạo hàm (mà chúng ta đã quen dùng theo cách ký hiệu của Lagrăngiơ là $f'(x)$) đã được Lâybnitx viết nhờ ký hiệu $\frac{dy}{dx}$, bằng cách thay thế ký hiệu của một hiệu bằng « ký hiệu vi phân » d. Sẽ không nảy ra khó khăn và bí hiểm gì nếu nhận thức rõ rằng ký hiệu đó chỉ là sự chỉ ra điều kiện cần để thực hiện được sự cho qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$ là nó kéo theo $\Delta y \to 0$. Trước khi cho qua giới hạn, phải giản ước tử và mẫu cho x hoặc biến đổi tỉ số đó sao cho sự qua giới hạn được thực hiện nguyên vẹn. Trong mỗi trường hợp riêng biệt, đó là điểm mấu chốt của quá trình vi phân. Nếu ta cho qua giới hạn mà không có những ước lược sơ bộ như vậy thì ta được một biểu thức không có nghĩa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$, biểu

thức này không đem lại lợi ích gì. Sự bí hiểm và sự không rõ ràng chỉ xảy ra trong trường hợp ta theo gương của Lâybnitx hoặc nhiều người kế tục ông đã nói một cái gì đó tương tự như sau: « Δx không dần tới 0. Trái lại « giá trị cuối cùng » Δx không bằng 0 mà là « *một đại lượng vô cùng bé* », « *một vi phân* » được biểu thị bởi ký hiệu dx. Tương tự, Δy có giá trị « cuối cùng » là lượng nhỏ vô hạn *dy*. Tỷ số thực sự của những vi phân nhỏ vô hạn đó lại là một số bình

thường $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ». Vì thế, Lâybnitx đã gọi đạo

hàm là « tỉ số vi phân ». Những đại lượng vô cùng nhỏ như vậy sẽ được xem như những số mới nào đó, tuy khác 0 nhưng lại nhỏ hơn bất kỳ một số dương nào trong hệ thống các số thực.

Người ta cho rằng những khái niệm như vậy chỉ hiểu được đối với một số ít người nhạy bén toán học thực sự. Do đó giải thích nó về bản chất là rất khó, bởi vì không phải ai cũng có sự nhạy bén đó hoặc có thể phát triển nó được. Tương tự như vậy, tích phân được xem như tổng của « một số vô cùng lớn các số hạng vô cùng bé » có dạng $f(x)dx$. Đã tồn tại một quan niệm cho rằng một tổng như vậy là tích phân hoặc diện tích, trong khi việc tính giá trị của nó như là giới hạn của một dãy các tổng hữu hạn của các số hạng thông thường $f(x_j)\Delta x_j$, mỗi số hạng này được xem như một phần phụ thêm nào đó. Bây giờ chúng ta sẽ bỏ ý định giải thích trực tiếp và sẽ định nghĩa tích phân như là giới hạn của một dãy các tổng hữu hạn. Nhờ con đường này mà mọi khó khăn sẽ vượt qua được và tất cả những cái quý giá trong giải tích sẽ có được một cơ sở vững chắc.

Bất luận những điều đã nêu ở trên, việc áp dụng cách ký hiệu của Lâybnitx: $\frac{dy}{dx}$ đối với đạo hàm và $\int f(x)dx$ đối với tích phân không những vẫn được tiếp tục mà còn tỏ ra rất có ích. Không có lý do gì để phản đối việc sử dụng đó, nếu như ta không quên rằng ký hiệu d chỉ là ký hiệu chuyển tới giới hạn. Điểm trội của cách ký hiệu Lâybnitx là ở chỗ có thể thao tác với các giới hạn của tỷ số hoặc tổng số như khi bản thân chúng là các tỉ số hoặc tổng số. Cách ký hiệu này luôn quyến rũ ta gán cho chúng một ý nghĩa phi toán học nào đó. Nếu không chịu sự quyến rũ ấy thì ít nhất các ký hiệu của Lâybnitx cũng là một sự rút gọn tuyệt vời các biểu thức cồng kềnh có chứa phép tính giới hạn. Về thực chất, chúng cũng là hoàn toàn cần thiết trong những phần phát triển xa hơn của lý thuyết.

Thí dụ, qui tắc d) — đạo hàm của hàm $x = g(y)$ ngược với hàm $y = f(x)$ (§ 3 chương 8) được thể hiện qua đẳng thức $g'(y)f'(x) = 1$. Với các ký hiệu của Lây-bnitx thì nó được ghi như sau: $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$, tức là có thể ước lược các vi phân giống như đã làm với các phân số thường. Tương tự, cách viết dưới dạng vi phân của qui tắc đạo hàm e) của hàm hợp $z = k(x)$ trong đó $z = g(y)$, $y = f(x)$ sẽ có dạng:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ngoài ra, các ký hiệu của Lâybnitx còn có một điểm trội nữa là chúng đã chỉ ra được bản thân *các đại lượng x, y, z* ở mức độ tường minh cao hơn so với

tương quan hàm của chúng. Nhưng tương quan này biểu thị *một qui trình* nào đó, tức là một tập hợp các phép toán nhờ đó ta thu được một đại lượng khác y từ một đại lượng x. Chẳng hạn, hàm y = f(x) = x^2 xác định một đại lượng y bằng bình phương của đại lượng x. Chính bản thân phép toán, trong trường hợp này phép nâng lên lũy thừa là đối tượng quan tâm của các nhà toán học. Các nhà vật lý và các kỹ sư thì lại chú ý trước tiên đến bản thân các đại lượng. Vì thế sự nhấn mạnh của bản thân các đại lượng trong các ký hiệu của Lâybnit đã đặc biệt thu hút những người nghiên cứu toán học ứng dụng.

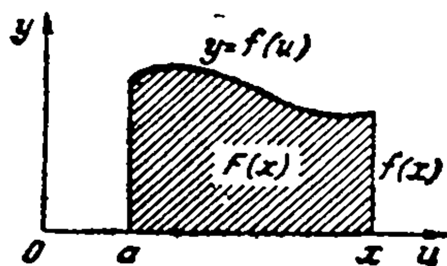
Cần nêu thêm một thí dụ nữa. Trong khi « các vi phân » với tư cách là những đại lượng vô cùng bé đã bị loại trừ ra khỏi cuộc sống toán học một cách triệt để và không phải là không nhục nhã thì bản thân từ « vi phân » lại lẻn vào cửa sau, nhưng bây giờ là để biểu thị một khái niệm bổ ích, hợp pháp một cách hoàn hảo. Bây giờ, nó biểu thị số gia Δx khi Δx nhỏ hơn so với các đại lượng khác đang xét. Tuy nhiên, ở đây ta không thể thảo luận vai trò của khái niệm đó trong các tính toán gần đúng. Ta cũng sẽ không xét đến những sự vật toán học khác mang tên « vi phân » một cách hợp pháp mà trong một số trường hợp đã tỏ ra rất có ích lợi trong giải tích và trong các ứng dụng hình học.

§ 5. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH

1. Định lý cơ bản. Khái niệm về phép tích phân và một phần khái niệm về phép vi phân đã được phát triển tốt từ trước khi có các công trình của Niutơn và Lâybnitx. Nhưng đã đến lúc hoàn toàn cần thiết phải có một phát minh rất đơn giản để làm cho giải

tích toán học đã hình thành có một bước tiến dài. Hai quá trình giới hạn dường như không có liên quan gì với nhau, một quá trình để vi phân và một quá trình để tích phân các hàm, lại có liên hệ chặt chẽ với nhau. Thực vậy, chúng là hai phép toán ngược nhau tương tự như phép toán cộng và phép toán trừ, phép toán nhân và phép toán chia. Phép tính vi phân và tích phân là một cái gì đó thống nhất.

Thành tựu vĩ đại của Niutơn và Lâybnitx là ở chỗ các ông lần đầu tiên đã nhận thức được rõ ràng và đã áp dụng *định lý cơ bản này của giải tích*. Tất nhiên, phát minh của họ phù hợp với con đường phát triển tự nhiên của khoa học và cũng không lấy gì làm lạ rằng hai con người khác nhau đã độc lập với nhau và gần như đồng thời đạt tới một nhận thức rõ ràng như đã nêu ở trên.



H. 274. Tích phân được xem như một hàm của cận trên

Để phát biểu chính xác định lý cơ bản, ta xét tích phân của một hàm $y = f(x)$ từ một hằng số a đến số x mà ta xem như một biến. Để không nhầm lẫn cận trên x của tích phân với biến dưới dấu tích phân, ta viết tích phân dưới dạng sau:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \qquad (1)$$

để chứng tỏ ta có ý định nghiên cứu tích phân như một hàm $F(x)$ của cận trên của nó (H. 274). Hàm $F(x)$ này là diện tích phần ở dưới đường cong $y = f(u)$, từ điểm $u = a$ đến điểm $u = x$. Đôi khi tích phân $F(x)$ với biến cận trên còn được gọi là « tích phân không xác định ».

Định lý cơ bản của giải tích được phát biểu như sau: *Đạo hàm của tích phân không xác định (I) theo cận trên x của nó bằng giá trị của hàm f(u) tại điểm u = x:*

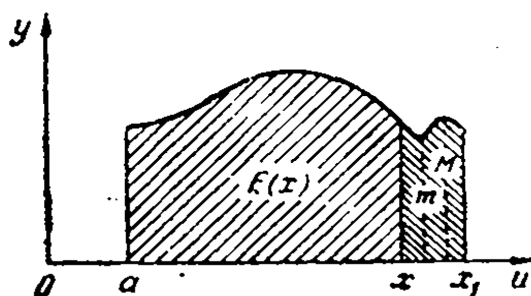
$$F'(x) = f(x)$$

Nói cách khác, *quá trình tích phân đi từ hàm f(x) đến hàm F(x) bị phá hủy bởi quá trình vi phân ngược với nó áp dụng cho hàm F(x);*

Dựa vào trực giác thì việc chứng minh mệnh đề này không có gì khó khăn. Nó dựa trên cái thể hiện của tích phân F(x) như một diện tích và đã bị làm rắc rối thêm khi ta biểu thị hàm F(x) dưới dạng đồ thị và cắt nghĩa đạo hàm F'(x) như là độ dốc tương ứng. Gạt về một bên sự thể hiện hình học của đạo hàm như đã xác lập trước đây, ta giữ nguyên việc cắt nghĩa tích phân F(x) như là một diện tích và việc lấy đạo hàm của hàm F(x) sẽ được thực hiện bằng phương pháp giải tích. Hiệu

$$F(x_1) - F(x)$$

chỉ là diện tích phần ở dưới đường cong y = f(u) nằm giữa các cận $u = x_1$ và u = x (H. 275). Dễ nhận thấy giá trị bằng số của diện tích đó bao hàm giữa các số $(x_1 - x)m$ và $(x_1 - x)M$: $(x_1 - x)m \leqslant F(x_1) - F(x) \leqslant (x_1 - x)M$ trong đó M và m là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f(u) trong khoảng từ u = x đến $u = x_1$. Thực ra, các tích này cho ta diện tích của hai hình chữ nhật, một hình chứa miền cong đang xét, còn hình kia nằm trong nó.



H. 275 — Dùng cho chứng minh định lý cơ bản

Do đó:

$$m \leqslant \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} \leqslant M$$

Ta giả thiết hàm f(u) là liên tục tức là khi x_1 tiến tới x thì hai đại lượng M và m dần tới giá trị của hàm f(u) tại điểm u = x, hay giá trị f(x). Trong trường hợp này, có thể coi như đã chứng minh được rằng:

$$F'(x) = \lim \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} = f(x) \qquad (2)$$

Ý nghĩa trực quan của kết quả này là vận tốc biến thiên của diện tích phần ở dưới đường cong y = f(x) bằng độ cao của đường cong tại điểm x.

Trong nhiều cuốn sách, nội dung của định lý cơ bản này thường bị làm mờ đi bởi cách dùng thuật ngữ không thích hợp. Nhiều tác giả đưa khái niệm đạo hàm vào trước rồi mới định nghĩa « tích phân không xác định » như là kết quả của một phép toán ngược với phép vi phân. Họ nói rằng hàm G(x) là tích phân không xác định của hàm f(x) nếu:

$$G'(x) = f(x)$$

Như vậy, cách trình bày này đã liên kết trực tiếp phép vi phân với từ « tích phân ». Mãi về sau khái niệm « tích phân không xác định » mới được đưa vào, nó được cắt nghĩa như là một diện tích hoặc một giới hạn của dãy các tổng mà chưa nhấn mạnh đầy đủ rằng bây giờ từ « tích phân » đã biểu thị cho một cái gì đó hoàn toàn khác trước. Dường như cái cơ bản nhất trong lý thuyết chỉ được phát hiện lén lút bằng lối cửa sau và học sinh đã gặp khó khăn lớn trong việc gắng hiểu bản chất của sự việc. Chúng ta không gọi hàm G(x), trong đó G'(x) = f(x) là « tích phân không xác định » mà gọi là *nguyên hàm* của hàm f(x). Bây giờ, định lý cơ bản có thể được phát biểu như sau:

Hàm F(x) là tích phân của hàm f(x) với cận dưới không đổi và cận trên là biến x, là một trong những nguyên hàm của hàm f(x).

Ta nói « một trong » những nguyên hàm bởi lẽ nếu G(x) là nguyên hàm của f(x) thì rõ ràng mọi hàm H(x) = G(x) + C (C là một hằng số bất kỳ) cũng là một nguyên hàm bởi vì H'(x) = G'(x). Điều khẳng định đảo lại cũng đúng. *Hai nguyên hàm G(x) và H(x) chỉ có thể khác nhau một số hạng hằng số.* Thực ra hiệu U(x) = G(x) — H(x) có đạo hàm U'(x) = G'(x) — — H'(x) = f(x) — f(x) = 0 là không đổi, bởi vì tất nhiên nếu đồ thị của hàm là nằm ngang tại mỗi điểm, thì bản thân hàm phải không đổi.

Điều này dẫn đến một qui tắc quan trọng để tính tích phân trong khoảng từ a đến b với giả thiết đã biết một nguyên hàm G(x) bất kỳ của hàm f(x). Theo định lý cơ bản thì hàm

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

cũng là nguyên hàm của hàm f(x). Nghĩa là, F(x) = = G(x)+C, trong đó C là hằng số. Giá trị của hằng số

này được xác định nếu ta để ý rằng $F(a) = \int_a^a f(u)du = 0$.

Do đó : 0 = G(a) +C tức là C = −G(a). Bây giờ, tích phân xác định trong khoảng từ a đến x sẽ thỏa mãn đẳng thức

$$F(x) = \int_a^x f(u)du = G(x) - G(a);$$

thay x bằng b, ta đi đến công thức

$$\int_a^b f(x)du = G(b) - G(a) \qquad (3)$$

không phụ thuộc vào nguyên hàm. Nói cách khác, muốn tính tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ chỉ cần tìm một hàm G(x) sao cho G'(x) = f(x) rồi lập hiệu G(b) — G(a)

2. Những ứng dụng đầu tiên. Tích phân các hàm x^r, cosx, sinx. Hàm arctgx. Ở đây ta không thể cho một quan niệm đầy đủ về vai trò của định lý cơ bản, chỉ giới hạn ở việc nêu ra một số thí dụ đặc sắc. Trong những bài toán cơ học, vật lý hoặc của bản thân toán học ta thường phải tính giá trị bằng số của một tích phân xác định của nó. Việc tìm tích phân trực tiếp như là một giới hạn có thể gặp khó khăn không vượt qua được. Mặt khác, như ta đã thấy ở § 3, một phép vi phân tùy ý được thực hiện tương đối dễ dàng, và có thể thu thập dễ dàng một số lớn các công thức vi phân. Ngược lại, mỗi công thức dạng G'(x) = f(x) có thể xem như một công thức xác định nguyên hàm G(x) của hàm f(x).

Công thức (3) cho phép ta dùng một số nguyên hàm đã biết để tính tích phân của hàm f(x) trong một khoảng cho trước nào đó.

Chẳng hạn, nếu muốn tìm tích phân của các lũy thừa x^2, x^3 hoặc dạng tổng quát x^n thì đơn giản nhất là tiến hành như đã chỉ ở § 1. Theo công thức vi phân thì đạo hàm của x^n bằng nx^{n-1}, tức là đạo hàm của hàm

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$$

là hàm

$$G'(x) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$$

Trong trường hợp này, hàm $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ là nguyên hàm của hàm $f(x) = x^n$, do đó ta có ngay:

$$\int_a^b x^n dx = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Lập luận này đơn giản rất nhiều so với qui trình cồng kềnh để tính trực tiếp tích phân từ giới hạn của tổng.

Trong § 3 ta đã thấy rằng với mọi s hữu tỷ dương hoặc âm, đạo hàm của hàm x^s bằng sx^{s-1}, cho nên khi $s = r + 1$ hàm

$$G(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1},$$

có đạo hàm $f(x) = G'(x) = x^r$ (ta giả thiết $r \neq -1$ tức là $s \neq 0$). Như vậy, hàm

$\frac{x^{r+1}}{r+1}$ là nguyên hàm hoặc tích phân không xác định của x^r và ta có (với a và b dương và $r \neq -1$), công thức:

$$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+2}}{r+1} \qquad (4)$$

Trong công thức (4) cần giả thiết rằng hàm x^r dưới dấu tích phân là xác định và liên tục trong khoảng tích phân tức là phải loại trừ điểm $x = 0$ nếu $r < 0$. Đó chính là lý do phải giả thiết a và b dương trong trường hợp này. Nếu ta đặt $G(x) = -\cos x$ thì có $G'(x) = \sin x$, từ đó suy ra hệ thức

$$\int_a^0 \sin x dx = -(\cos a - \cos 0) = 1 - \cos a.$$

Tương tự, nếu $G(x) = \sin x$ thì $G'(x) = \cos x$ và

$$\int_0^a \cos x dx = \sin a - \sin 0 = \sin a.$$

Từ công thức đạo hàm của hàm arctgx suy ra được một kết quả đặc biệt lý thú:

$$\frac{d(\text{arctg}x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nếu như hàm arctgx là nguyên hàm của hàm $\frac{1}{1+x^2}$ thì dựa vào công thức (3) có thể viết

$$\text{arctg}b - \text{arctg}0 = \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Nhưng $\text{arctg}0 = 0$ (giá trị 0 của tang tương ứng với giá trị 0 của góc). Như vậy ta có

$$\text{arctg}b = \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Đặc biệt nếu $b = 1$ thì $\text{arctg}\, b = \frac{\pi}{4}$ (giá trị của tang tương ứng với góc 45^0 hay $\frac{\pi}{4}$). Bởi vậy, ta thu được một công thức đặc biệt

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Điều này chứng tỏ diện tích phần nằm dưới đồ thị

của hàm $y = \frac{1}{1+x^2}$ trong khoảng từ $x = 0$ đến $x = 1$

bằng một phần tư diện tích hình tròn đơn vị.

3. **Công thức Lâybnitx cho số π.** Kết quả sau cùng này dẫn đến một trong những công thức toán học đẹp nhất được phát hiện trong thế kỷ XVII — dãy Lâybnitx để tính số π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (7)$$

Ký hiệu $+ \dots$ cần được hiểu là dãy các « tổng riêng» hữu hạn, thu được khi chỉ lấy n số hạng của tổng trong vế phải của đẳng thức, dần tới giới hạn $\frac{\pi}{4}$ khi n tăng vô hạn...

Muốn chứng minh công thức này ta chỉ cần nhớ lại công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân hữu hạn:

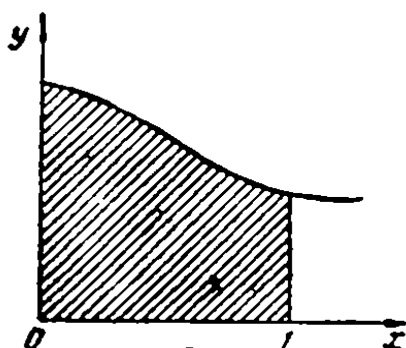
$$\frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \frac{q^n}{1-q}$$

Nếu trong đồng nhất thức đại số sau cùng này ta đặt $q = -x^2$ thì:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + R_n \quad (8)$$

trong đó « số hạng dư » R_n được cho bởi công thức

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$



H. 276 — Diện tích ở dưới đường cong $y = \frac{1}{1+x^2}$ (trong khoảng từ 0 đến 1) bằng $\frac{\pi}{4}$

Có thể tích phân đẳng thức (8) trong khoảng từ 0 đến 1. Theo quy tắc a) trong § 3, trong vế phải ta phải lấy tổng các tích phân của từng số hạng. Dựa vào (4) ta biết rằng:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

trong trường hợp riêng ta có

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} \text{ do đó : } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + T_n \quad (9)$$

trong đó $T_n = (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$. Theo công thức (5), vế trái của công thức (9) bằng $\frac{\pi}{4}$. Hiệu giữa $\frac{\pi}{4}$ và tổng riêng

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

bằng $\frac{\pi}{4} - S_n = T_n$. Còn phải chứng minh rằng T_n dần

tới 0 khi n tăng. Ta có bất đẳng thức:

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqslant x^{2n}$$

Dùng công thức (13) § 1, ta có bất đẳng thức

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \text{ khi } f(x) \leqslant g(x) \text{ và } a < b,$$

cho nên $|T_n| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^{2n}dx.$

Theo công thức (4), vế phải của bất đẳng thức này bằng $\frac{1}{2n+1}$, bởi thế $|T_n| < \frac{1}{2n+1}$. Cuối cùng, ta có bất đẳng thức: $\left|\frac{\pi}{4} - S_n\right| < \frac{1}{2n+1}$

vì $\frac{1}{2n+1}$ dần tới 0 cho nên S_n dần tới $\frac{\pi}{4}$ khi n tăng.

Như vậy công thức Laybnitx đã được chứng minh.

§ 6. HÀM MŨ VÀ LOGARIT

Các khái niệm giải tích giúp ta xây dựng một lý thuyết hàm logarit và hàm mũ đầy đủ hơn rất nhiều so với lý thuyết đã xây dựng bằng quy trình sơ cấp là cơ sở của việc giảng dạy bình thường ở nhà trường. Ở đây, ta thường xuất phát từ các lũy thừa nguyên a^n của số dương a, rồi định nghĩa căn thức $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ và tính

được các giá trị a^r với mọi số mũ hữu tỷ $r = \frac{n}{m}$. Sau đó, giá trị của lũy thừa a^x với x vô tỷ được định nghĩa sao cho a^x phải là một hàm liên tục của x là một vấn đề tế nhị thường được bỏ qua trong khuôn khổ trình bày sơ cấp. Cuối cùng, lôgarit của số y với cơ số a được gọi là hàm ngược với hàm mũ $y = a^x$.

Trong cách trình bày lý thuyết xây dựng trên cơ sở giải tích của các hàm này, quá trình tư duy sẽ ngược lại. Ta bắt đầu từ lôgarit rồi mới đi đến hàm mũ.

1. Định nghĩa và tính chất của lôgarit. Số Ơle e. Ta sẽ định nghĩa lôgarit hoặc chính xác hơn « lôgarit tự nhiên » $F(x) = \ln x$ (mối liên hệ của nó với logarit thập phân thông thường đã được xác lập trong § 2) xem như là diện tích phần ở dưới đường cong $y = \frac{1}{u}$ trong khoảng từ $u = 1$ đến $u = x$ hoặc được quy về tích phân sau đây

$$F(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{u}\, du \quad (1)$$

(xem H. 5). Ở đây, biến x có thể là một số dương tùy ý. Số 0 bị loại trừ vì khi u dần tới 0 thì hàm dưới dấu tích phân sẽ dần tới vô hạn.

Tất nhiên ta phải nghiên cứu hàm F(x). Ta biết rằng nguyên hàm của một lũy thừa x^n bất kỳ cũng chính là một hàm loại này bởi vì nó bằng $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; bậc $n = -1$

phải loại trừ vì trong trường hợp này, mẫu số n + 1 triệt tiêu và công thức (4) sẽ mất ý nghĩa. Bởi thế, có thể hy vọng việc nghiên cứu tích phân của hàm $\frac{1}{x}$ hoặc $\frac{1}{u}$ sẽ dẫn đến một loại hàm mới và lý thú.

Tuy rằng ta đã thừa nhận công thức (1) làm định nghĩa của hàm lnx, song ta còn chưa « biết » bản thân hàm đó nếu ta chưa xác lập được các tính chất của nó và chưa tìm được các phương pháp để tính số trị của nó. Cần lưu ý rằng điểm đặc trưng cho các phương pháp hiện đại trong giải tích là ta xuất phát từ các khái niệm chung như diện tích hoặc tích phân chẳng hạn và dựa trên những khái niệm chung này ta xây dựng những định nghĩa tương tự như (1); sau đó ta rút ra những tính chất của các sự vật đã được định nghĩa và đến cuối cùng mới đi tới những biểu thức tường minh để tính số trị của chúng.

Tính chất đầu tiên quan trọng của hàm logx được suy ra trực tiếp từ định lý cơ bản §5. Theo định lý đó thì đẳng thức sau là đúng:

$$F'(x) = \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Từ công thức (2) suy ra đạo hàm F(x) luôn dương, tất nhiên điều này chứng tỏ rằng hàm lnx đơn điệu tăng khi x tăng.

Tính chất chủ yếu của logarit được biểu thị bởi công thức:

$$\ln a + \ln b = \ln(ab). \quad (3)$$

Ý nghĩa của công thức này trong những ứng dụng thực tiễn của logarit vào những tính toán bằng số đã

được biết rất rõ. Có thể thu được công thức (3) một cách trực quan bằng cách dùng các diện tích được xác định bởi ba đại lượng, cụ thể là lna, lnb và ln(ab). Nhưng ta sẽ trình bày tỉ mỉ một chứng minh điển hình của giải tích. Cùng với hàm F(x) = lnx ta xét một hàm khác:

$$k(x) = \ln(ax) = \ln w = F(w).$$

nếu đặt w = f(x) = ax trong đó a là một hằng số dương tùy ý. Có thể lấy đạo hàm của hàm k(x) một cách dễ dàng nhờ quy tắc e) trong §3: k'(x) = K'(w) . f'(x). Từ hệ quả của công thức (2) và vì f'(x) = a, biểu thức này sẽ có dạng:

$$k'(x) = \frac{a}{w} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Như vậy, hàm k(x) cũng có cùng một đạo hàm như hàm F(x) và (xem phần 1 § 6 chương này) ta sẽ có đồng nhất thức

$$\ln(ax) = k(x) = F(x) + c,$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào giá trị của biến x. Hằng số c được xác định nhờ phép thế đơn giản x = 1 vào đẳng thức sau cùng này. Từ định nghĩa (1) suy ra

$$F(1) = \ln 1 = 0$$

(bởi vì tích phân được lấy làm định nghĩa sẽ có cận trên và cận dưới bằng nhau tại giá trị x = 1). Bây giờ, ta có thể viết:

$$k(1) = \ln(a.1) = \ln a = \ln 1 + c = c$$

tức là c = lna và vì thế, với mọi x bao giờ ta cũng có

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x. \tag{3a}$$

Đặt $x = b$, cuối cùng ta có được công thức (3) phải tìm. Đặc biệt khi $a = x$ ta có:

$$\ln(x^2) = 2\ln x,$$
$$\ln(x^3) = 3\ln x, \quad (4)$$
$$\dots\dots$$
$$\ln(x^n) = n\ln x.$$

Từ các đẳng thức (4) có thể kết luận khi x tăng vô hạn các giá trị của hàm $\ln x$ cũng tăng vô hạn. Chẳng hạn chỉ cần lưu ý rằng:

$$\ln(2^n) = n\ln 2$$

trong đó, tất nhiên vế phải tăng lên vô hạn cùng với n, nhắc nhở ta tính chất đơn điệu tăng đã được xác nhận của hàm $\ln x$. Hơn nữa, ta có:

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}$$

tức là $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$. (5)

Cuối cùng đẳng thức

$$\ln x^r = r\ln x \quad (6)$$

cũng đúng với mọi số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$. Thực vậy, nếu đặt $x^r = u$, ta có

$$n\ln u = \ln u^n = \ln x^{\frac{m}{n} \cdot n} = \ln x^m = m\ln x$$

từ đó:

$$\ln x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\ln x.$$

Vì lnx là một hàm liên tục và đơn điệu của x nhận giá trị 0 tại $x = 1$ và dần tới vô hạn khi x tăng vô hạn, cho nên phải tồn tại một số x nào đó lớn hơn đơn vị mà đối với nó ta sẽ có đẳng thức $\ln x = 1$. Theo ơle, ta biểu thị số đó là e (tính đồng nhất của định nghĩa này với định nghĩa nêu ở §2 chương VI sẽ được chứng minh sau). Như vậy, số e được xác định bởi phương trình

$$\ln e = 1. \tag{7}$$

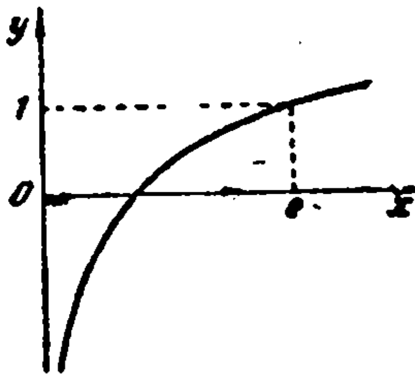
Ta sẽ đưa số e vào bằng cách dựa trên tính chất của hàm liên tục bảo đảm sự tồn tại nghiệm của phương trình đó. Bây giờ ta tiếp tục tìm kiếm để đạt tới những công thức tường minh cho phép tính e với độ chính xác tùy ý.

2. Hàm mũ. Tóm tắt các kết quả nêu trên, ta có thể nói rằng hàm $F(x) = \ln x$ bằng 0 khi $x = 1$, đơn điệu tăng vô hạn khi $x \to \infty$ (nhưng khi đó đồ thị sẽ có độ dốc giảm, bằng đại lượng $\frac{1}{x}$), khi x nhỏ hơn đơn vị nó được biểu thị bởi hàm $-\ln \frac{1}{x}$, tức là lnx dần tới âm vô cực khi $x \to 0$.

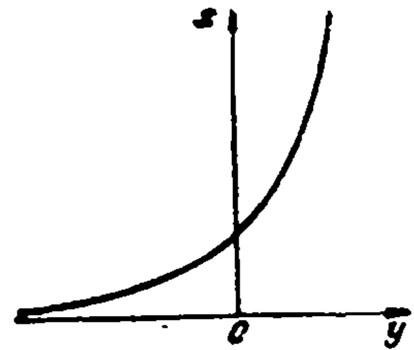
Tính chất đơn điệu tăng của hàm $y = \ln x$ cho phép ta khảo sát hàm số ngược với nó.

$$x = E(y),$$

đồ thị của hàm này (H.278) thu được từ đồ thị của hàm $y = \ln x$ (H. 277) bằng cách thông thường; hàm ngược này được xác định với mọi y từ $-\infty$ đến $+\infty$. Khi $y \to -\infty$ hàm E(y) dần tới 0; khi $y \to +\infty$ thì $E(y) \to +\infty$



H. 277
$y = \ln x$



H. 278
$x = E(y)$

Hàm E đang xét có tính chất cơ bản sau đây:

$$E(a) \cdot E(b) = E(a + b) \qquad (8)$$

với mọi cặp giá trị a và b. Đồng nhất thức này chỉ là một dạng khác của công thức (3) biểu thị tính chất của logarit. Thực vậy, nếu ta cho công thức (3) dạng $\ln x + \ln z = \ln(xz)$ rồi đặt

$E(a) = x$; $E(b) = z$ (tức là $a = \ln x$, $b = \ln z$), thì sẽ có:

$$\ln(xz) = \ln x + \ln z = a + b$$

từ đó suy ra

$$E(a + b) = xz = E(a) \cdot E(b)$$

Đó là điều cần chứng minh.

Vì theo định nghĩa $\ln e = 1$ cho nên có hệ thức:

$$E(1) = e\,;$$

kết hợp với công thức (8) ta được đẳng thức $e^2 = E(1) \cdot E(1) = E(2)$ v...v. Tổng quát:

$$E(n) = e^n$$

với mọi n nguyên. Tương tự, ta có $E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$ tức là

$$E\left(\frac{p}{q}\right) = E\left(\frac{1}{q}\right) \dots E\left(\frac{1}{q}\right) = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

đặt $\frac{p}{q} = r$ ta có $E(r) = e^r$ với mọi r hữu tỷ

Bởi thế, *việc định nghĩa* lũy thừa vô tỷ của số e theo công thức:

$$e^y = E(y)$$

đúng với mọi số thực y là hoàn toàn tất nhiên, vì hàm E liên tục với mọi giá trị y và đồng nhất với hàm e^y với mọi giá trị hữu tỷ. Bây giờ, công thức (8) biểu thị tính chất cơ bản của hàm E (hoặc hàm mũ theo cách gọi tên đã được thừa nhận chung) có thể viết bằng đẳng thức

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b} \qquad (9)$$

được xác lập với mọi giá trị hữu tỉ hoặc vô tỉ a và b. Trong tất cả những lập luận đó, ta đã coi e là « cơ số » hay chính xác hơn « cơ số tự nhiên » của logarit và hàm mũ. Việc chuyển từ cơ số e sang một cơ số dương khác nào đó không có gì khó khăn. Ta bắt đầu bằng việc xem xét logarit *tự nhiên*:

$$\alpha = \ln a$$

(tương đương với $a = e^\alpha = e^{\ln a}$). Ta sẽ định nghĩa hàm mũ a^x nhờ biểu thức phức tạp sau đây:

$$z = a^x = e^{\alpha x} = e^{x \ln a} \qquad (10)$$

Thí dụ: $10^x = e^{x \ln 10}$

Ta gọi hàm ngược với hàm a^x là *logarit theo cơ số a*; dễ hiểu rằng *logarit tự nhiên* của z là tích của x với α. Nói cách khác, logarit của số z với cơ số a tìm được

bằng cách chia logarit tự nhiên của số z cho logarit tự nhiên của số a. Nếu a = 10 thì số đó (với bốn chữ số có nghĩa) được biểu thị như sau:

$$\ln 10 \approx 2{,}303.$$

3. Công thức vi phân các hàm e^x, a^x, x^s. Vì ta đã định nghĩa hàm mũ là hàm ngược của hàm $y = \ln x$ cho nên từ qui tắc vi phân các hàm ngược (§ 3) suy ra:

$$E'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = E(y),$$

tức là

$$E'(y) = E(y). \tag{11}$$

Đạo hàm của hàm mũ «tự nhiên» bằng bản thân hàm đó. Đó là nguồn gốc thực sự của mọi tính chất của hàm mũ và là nguyên nhân cơ bản của vai trò của nó trong mọi ứng dụng mà ta sẽ thấy ngày càng rõ trong các mục tiếp sau đây. Dùng các ký hiệu vi phân, ta có thể viết công thức (11) dưới dạng sau:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \tag{11a}$$

Trong trường hợp tổng quát hơn, bằng cách vi phân hàm hợp

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

Nhờ quy tắc cho trong §3, ta được đẳng thức:

$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x} = \alpha f(x)$$

Như vậy, nếu đặt $\alpha = \ln a$, ta thấy hàm $f(x) = a^x$ có đạo hàm $f'(x) = a^x \ln a$

Bây giờ, ta xét hàm lũy thừa $f(x) = x^s$ với số mũ s thực bất kỳ và với biến x dương. Ta có thể định nghĩa nó bằng công thức

$$x^s = e^{s \ln x}$$

Áp dụng quy tắc vi phân hàm hợp một lần nữa vào trường hợp $f(x) = e^{sz}$, $z = \ln x$, ta tìm được đạo hàm

$$f'(x) = se^{sz} \cdot \frac{1}{x} = sx^s \cdot \frac{1}{x}$$

tức là: $f'(x) = sx^{s-1}$, hoàn toàn phù hợp với qui tắc vi phân hàm mũ với số mũ s hữu tỉ trước đây.

4. Các biểu thức tường minh của số e và của các hàm e^x và $\ln x$ viết dưới dạng giới hạn. Muốn tìm các công thức tường minh biểu thị cho những hàm đó, ta dùng công thức vi phân các hàm mũ và logarit. Vì đạo hàm $\ln x$ bằng $\frac{1}{x}$, cho nên theo định nghĩa đạo hàm ta được hệ thức

$$\frac{1}{x} = \lim \frac{\ln x_1 - \ln x}{x_1 - x} \text{ khi } x_1 \to x$$

Ta đặt $x_1 = x + h$ và giả thiết h dần tới 0 chạy qua dãy $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

bây giờ, áp dụng quy tắc phép tính logarit, ta được

$$\frac{\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x}{\frac{1}{n}} = n\ln\frac{x + \frac{1}{n}}{x} =$$

$$= \ln\left[\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n\right] \to \frac{1}{x}.$$

Nếu ta đặt z thay cho $\frac{1}{x}$ và cho qua giới hạn, hệ

thức viết ở trên sẽ có dạng

$$z = \lim \ln \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right] \text{ khi } n \to \infty$$

hoặc với thuật ngữ của hàm mũ

$$e^z = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ khi } n \to \infty. \qquad 12)$$

Ta được một công thức đã biết để xác định hàm mũ như một giới hạn. Đặc biệt, khi $z = 1$, công thức này cho:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ khi } n \to \infty; \qquad (13)$$

còn khi $z = -1$, ta có

$$\frac{1}{e} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \text{ khi } n \to \infty \qquad (13a)$$

Các biểu thức này dẫn đến các phân tích thành chuỗi vô hạn. Theo định lý nhị thức, có thể viết

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\,\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{x^n}{n^n}$$

hay

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\ldots\right)\ldots \times \left(1 - \frac{n-2}{n}\right)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Điều đó cho phép ta dự đoán và hoàn toàn không khó khăn gì có thể chứng minh rằng (ở đây ta bỏ qua chi tiết) khi $n \to \infty$ có thể cho qua giới hạn bằng cách thế các đại lượng $\frac{1}{n}$ trong mỗi số hạng bằng 0. Kết quả, ta được một chuỗi vô hạn quen biết dùng để tính hàm e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (14)$$

đặc biệt khi $x = 1$ thì chuỗi hội tụ đến giới hạn e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

điều này khẳng định sự đồng nhất của e với số đã định nghĩa ở §2 chương VI. Khi $x = -1$ ta có chuỗi

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots,$$

Chuỗi này, với số rất ít số hạng, đã cho một xấp xỉ khá cao bởi vì sai số khi lấy đến số hạng thứ n đã nhỏ hơn số hạng thứ $n + 1$.

Dùng công thức vi phân hàm mũ, ta được một biểu thức lý thú cho logarit. Hệ thức:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1,$$

là đúng vì giới hạn này chính là giá trị đạo hàm của hàm e^y khi $y = 0$, nó bằng 1. Trong công thức này ta đặt $\frac{z}{n}$ thay cho h, trong đó z là số tùy ý, n chạy qua

dãy số tự nhiên. Khi đó, ta có :

$$n.\frac{e^{\frac{z}{n}}-1}{z}\to 1,$$

hay $\quad n(\sqrt[n]{e^z}-1)\to z \qquad$ khi $n\to\infty$.

Dùng ký hiệu $z = \ln x$ hoặc $e^z = x$ rút cục có thể viết :

$$\ln x = \lim n(\sqrt[n]{x}-1) \text{ khi } n\to\infty. \tag{15}$$

Vì $\sqrt[n]{x}\to 1$ khi $n\to\infty$ (xem § 1 phần phụ lục chương VI, công thức (15) biểu thị logarit dưới dạng tích hai thừa số, thừa số thứ nhất dần tới vô hạn, thừa số thứ hai dần tới 0.

5. Chuỗi vô hạn cho logarit. Phép tính logarit. Không dùng công thức (15), cũng tính được giá trị bằng số của các logarit. Một biểu thức hoàn toàn tường minh khác rất phù hợp với mục đích này còn có giá trị cao về mặt lý thuyết. Nhờ phương pháp đã áp dụng để tính π, ta sẽ tìm được biểu thức đó dựa vào định nghĩa logarit theo công thức (1). Tuy nhiên ở đây cần có một bước chuẩn bị : thay cho hàm $\ln x$, ta xét hàm $y = \ln(1 + x)$ gồm có các hàm $y = \ln z$ và $z = 1 + x$. Ta có

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}.1=\frac{1}{1+x}$$

Như vậy, hàm $\ln(1 + x)$ là nguyên hàm của hàm $\frac{1}{1+x}$. Theo định lý cơ bản, ta thấy tích phân của hàm $\frac{1}{1+u}$ trong khoảng từ 0 đến x bằng biểu thức

$\ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$ hoặc dưới hình thức ký hiệu

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+u}\,du. \tag{16}$$

(tất nhiên có thể thu được công thức này một cách trực giác từ thể hiện hình học của logarit như là một diện tích).

Trong công thức (16), thay cho $\frac{1}{(1+u)}$ ta đặt tổng của cấp số nhân (xem 3 § 6 chương này)

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^{n-1}u^{n-1} + (-1)^n.$$

$\frac{u^n}{1+u}$. Để thận trọng, ta không làm toán với chuỗi vô hạn mà chỉ làm toán một tổng hữu hạn và số hạng dư. Số hạng dư này bằng :

$$R = (-1)^n \frac{u^n}{1+u}.$$

Thay tổng trên vào công thức (16), ta có thể áp dụng qui tắc tích phân từng số hạng một tổng hữu hạn. Tích phân của lũy thừa u^s trong khoảng từ 0 đến x bằng $\frac{x^{s+1}}{s+1}$. Bởi thế ta có ngay:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}$$

$\frac{x^n}{n} + T_n$ trong đó số hạng dư T_n được biểu thị bởi

tích phân

$$T_n = (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du.$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng T_n dần tới 0 khi n tăng, với giả định rằng biến x chỉ có thể lớn hơn -1 và không vượt quá $+1$, hay nói cách khác để cho bất đẳng thức $-1 < x \leqslant 1$ được thực hiện (ta để ý rằng phải kể cả $x = +1$ trong khi không kể -1). Theo giả thiết của ta thì trong khoảng tích phân, biến u lớn hơn một số $-\alpha$ nào đó dần tới -1 nhưng bao giờ cũng lớn hơn -1, tức là $-1 < -\alpha < u$. Suy ra $0 < 1 - \alpha < 1 + u$. Như vậy, với điều kiện u nằm trong khoảng từ 0 đến x, bất đẳng thức sau đúng

$$\left|\frac{u^n}{1+u}\right| \leqslant \frac{|u|^n}{1-\alpha}$$

và do đó $\quad |T_n| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\left|\displaystyle\int_0^x u^n du\right|,$

hoặc $\quad \left|T_n\right| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\,\dfrac{|x|^{n-1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\,\dfrac{1}{n+1}.$

Vì số $1 - \alpha$ là hằng số cho nên biểu thức ở bên phải, và do đó cả biểu thức $|T_n|$ dần tới 0 khi n tăng, nghĩa là, từ bất đẳng thức

$$\left|\ln(1+x) - \left\{x - \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n+1} \qquad (17)$$

suy ra khi $-1 < x \leqslant 1$ thì đẳng thức sau đúng

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (18)$$

Đặc biệt, nếu thay $x = 1$ ta được một công thức thú vị

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (19)$$

Công thức này về mặt cấu trúc giống với công thức biểu thị số $\frac{\pi}{4}$ viết dưới hình thức chuỗi đã nêu trước đây. Chuỗi (18) không có giá trị thực tiễn lớn để tính các logarit vì miền biến thiên của đại lượng $1 + x$ giới nội trong khoảng từ 0 đến 2 và vì tính hội tụ của chuỗi này rất chậm: phải lấy nhiều số hạng mới được một kết quả tương đối chính xác. Nhờ thủ thuật sau đây ta sẽ thu được một biểu thức thuận tiện hơn về mặt thực tiễn. Ta thay x bằng $-x$ trong công thức (18):

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (20)$$

Sau đó trừ công thức (18) cho công thức (20) và áp dụng phép biến đổi $\ln a - \ln b = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln\frac{a}{b}$,

ta được

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right). \quad (21)$$

Chuỗi này hội tụ nhanh hơn. Ngoài ra, vế trái của công thức có thể biểu thị logarit của một số dương z tùy ý,

bởi vì phương trình $\frac{1+x}{1-x} = z$ có nghiệm x bao hàm giữa -1 và $+1$ với mọi x dương. Chẳng hạn, nếu cần tính ln 3 thì ta đặt $x = \frac{1}{2}$, lúc này ta có:

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \dots\right)$$

Chỉ cần lấy 6 số hạng cho đến số hạng $\frac{2}{11.2^{11}} = \frac{1}{11264}$ ta được giá trị

$$\ln 3 = 1{,}0968$$

với năm chữ số có nghĩa.

§ 7. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Các định nghĩa. Vai trò chủ chốt của hàm mũ và hàm lượng giác trong giải tích toán học và trong những ứng dụng vào các bài toán vật lý được dựa trên cơ sở các hàm này là nghiệm của « các phương trình vi phân đơn giản nhất ».

Phương trình vi phân đối với hàm ẩn $u = f(x)$ có đạo hàm $u' = f'(x)$ (ký hiệu u là hình thức viết tắt rất đạt của ký hiệu f(x) vì đại lượng u và sự phụ thuộc hình thức của nó với x xem như là hàm f(x) sẽ không cần phải

có sự nhấn mạnh đặc biệt) là một phương trình chứa hàm u, đạo hàm u' và có thể có biến độc lập x. Chẳng hạn như:

$$u' = u + \sin(xu)$$

hoặc
$$u' + 3u = x^2$$

Trong trường hợp tổng quát hơn thì phương trình vi phân có thể chứa đạo hàm bậc hai $u'' = f''(x)$ hoặc các đạo hàm bậc cao hơn, như phương trình

$$u'' + 2u' - 3u = 0$$ chẳng hạn.

Trong mọi trường hợp tương tự, ta có nhiệm vụ tìm hàm $u = f(x)$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Nghiệm của phương trình vi phân là sự mở rộng của bài toán tích phân, tức là việc tìm nguyên hàm của hàm $g(x)$ cho trước, điều này được quy về việc giải một phương trình vi phân đơn giản nhất

$$u' = g(x).$$

Thí dụ, các nghiệm của phương trình vi phân:

$$u' = x^2$$

là các hàm $u = \frac{x^3}{3} + C$, trong đó C là hằng số tùy ý.

2. Phương trình vi phân của hàm mũ. Sự phân rã phóng xạ. Định luật tăng trưởng. Lãi kép.

Hàm mũ $u = e^x$ là nghiệm của phương trình vi phân:

$$u' = u \quad (1)$$

vì đạo hàm của hàm mũ bằng chính hàm đó. Nói chung hàm $u = ce^x$ trong đó c là hằng số tùy ý sẽ là nghiệm của phương trình (1). Tương tự, hàm:

$$u = ce^{kx} \quad (2)$$

trong đó c và k là hai hằng số tùy ý, sẽ là nghiệm của phương trình vi phân

$$u' = ku \quad (3)$$

Đảo lại, mọi hàm $u = f(x)$ thỏa mãn phương trình (3) sẽ có dạng (2). Thực vậy, giả thử các hàm $x = h(u)$ và $u = f(x)$ là các hàm ngược, ta có:

$$h' = \frac{1}{u'} = \frac{1}{ku}.$$

Hàm $\frac{\ln u}{k}$ là nguyên hàm của đạo hàm $\frac{1}{ku}$ phải tìm, như vậy $x = h(u) = \frac{\ln u}{k} + b$, trong đó b là một hằng số nào đó. Suy ra

$$\ln u = kx - bx$$

và

$$u = e^{kx} . e^{-kb}$$

Đặt đại lượng không đổi e^{-bk} bằng c, ta có

$$u = ce^{kx}$$

đúng như là điều cần phải thấy trước.

Ý nghĩa to lớn của phương trình (3) là ở chỗ nó « điều chỉnh » các quá trình vật lý, trong đó khối lượng u của một vật chất nào đó là hàm của thời gian:

$$u = f(t)$$

biến thiên sao cho vận tốc biến thiên tại mỗi thời điểm tỷ lệ với khối lượng u của vật chất có mặt. Trong trường hợp này, *vận tốc biến thiên* tại thời điểm t, tức là:

$$u' = f'(t) = \lim \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$$

bằng ku, trong đó k là hệ số tỉ lệ không đổi; k sẽ dương nếu u tăng và âm nếu u giảm. Trong cả hai trường hợp hàm u sẽ thỏa mãn phương trình vi phân (3) do đó nó sẽ có dạng:

$$u = ce^{kt}$$

Hằng số c được xác định nếu biết khối lượng vật chất u_0 có mặt tại thời điểm ban đầu, tức là khi $t = 0$. Ta tìm được đại lượng u_0 khi thế $t = 0$ trong phương trình (2):

$$u_0 = ce^0 = c$$

từ đó suy ra: $u = u_0e^{kt}$ (4)

Cần lưu ý rằng ta xuất phát từ giả thiết *vận tốc biến thiên* của đại lượng u cho trước và rút ra định luật (4) cho phép tính khối lượng thực của vật chất u tại một thời điểm bất kỳ t. Bài toán này độc lập với bài toán tìm đạo hàm của một hàm bất kỳ.

Sự phân rã của một chất phóng xạ nào đó là một thí dụ điển hình của loại đã nêu ở trên. Giả thử $u = f(t)$ là khối lượng của vật chất tại thời điểm t, nếu thừa nhận giả thiết mỗi phần tử riêng biệt của vật chất có một xác suất phân rã xác định nào đó và xác suất này không phụ thuộc vào sự có mặt của các phần tử khác thì vận tốc mà khối lượng u bị phân rã tại một thời điểm t cho trước sẽ tỷ lệ với khối lượng chung của chất u. Như vậy, hàm u phải thỏa mãn phương trình (3) với hằng số âm k đo độ nhanh của quá trình phóng xạ. Dạng của hàm như sau:

$$u = u_0e^{kt}$$

Từ đó suy ra, trong những khoảng thời gian bằng nhau thì có cùng một phần của chất có mặt bị phân rã.

Thực vậy, nếu u_1 là khối lượng vật chất tại thời điểm t_1, còn u_2 là khối lượng vật chất tại một thời điểm t_2 tiếp sau nào đó thì

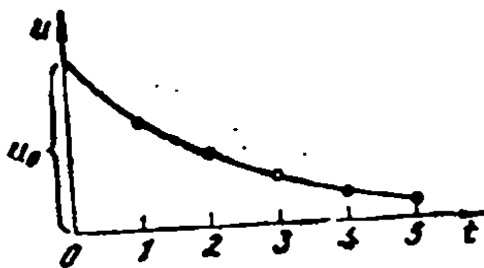
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_0e^{kt2}}{u_0e^{kt1}} e^{k(t_2 - t_1)}$$

biểu thức này chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_2 - t_1$. Chẳng hạn, ta sẽ tính thời gian phân rã để còn lại đúng một nửa vật chất, ta phải tính $s = t_2 - t_1$ từ phương trình

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} e^{ks}$$

và được: $$ks = \ln\frac{1}{2}, \quad s = \frac{-\ln 2}{k}. \qquad (5)$$

Đảo lại, biết s, có thể tính được $k = \dfrac{-\ln 2}{s}$



H. 279. Sự giảm theo định luật mũ ? $u = u_0e^{kt}$, $k < 0$

Đối với mỗi chất phóng xạ giá trị s có tên là « chu kỳ nửa phân rã ». Số s hoặc một số tương tự nào đó (ví dụ chẳng hạn, giá trị r trong đó $\frac{u_2}{u_1} = \frac{999}{1000}$) có thể tìm được bằng thực nghiệm. Đối với Radi thì chu kỳ nửa phân rã gần bằng 1550 năm. Do đó:

$$k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1550} = -0,0000447.$$

Từ đây ta được : $u = u_0e^{-0,0000447t}$.

Một thí dụ và định luật gần với định luật hàm mũ vừa xét là định luật lãi kép. Giả thử một vốn u_0 (đôla) nào đó được cho vay với lãi suất 3% (kép) hàng năm. Sau một năm vốn đã trở nên :

$$u_1 = u_0 (1 + 0,03);$$

sau hai năm nó sẽ là

$$u_2 = u_1 (1 + 0,03) = u_0 (1 + 0,03)^2.$$

Cuối cùng, sau t năm nó sẽ là

$$u_t = u_0 (1 + 0,03)^t. \qquad (6)$$

Bây giờ, nếu lãi suất không tính một lần trong năm mà tính một lần trong tháng hoặc tổng quát hơn, một lần trong một phần n của một năm thì sau t năm vốn sẽ được biểu thị bởi công thức

$$u_0\left(1 + \frac{0,03}{n}\right)^{nt} = u_0\left[\left(1 + \frac{0,03}{n}\right)^n\right]^t.$$

Nếu giả thiết số n rất lớn tức là lãi suất được tính hàng ngày hoặc hàng giờ thì, nếu tưởng tượng n dần tới vô hạn, ta thấy đại lượng trong ngoặc dần tới $e^{0,03}$ theo điều đã nói trong §6 và tới giới hạn thì sau t năm vốn sẽ được biểu thị bởi công thức

$$u_0e^{0,03t}, \qquad (7)$$

phù hợp với quá trình tính lãi kép liên tục. Cũng có thể tính được thời gian s cần để gấp đôi vốn cơ bản cho vay với lãi suất kép 3% liên tục. Ta có

$$\frac{u_0e^{0,03s}}{u_0} = 2$$

từ đó $s = \dfrac{100}{3} \ln 2 = 23,10$

Như vậy, vốn sẽ được gấp đôi sau khoảng gần 23 năm.

Đáng lẽ phải tiến hành theo quy trình mô tả ở trên rồi cho qua giới hạn, ta có thể tìm được công thức (7) bằng cách nói đơn giản rằng vận tốc tăng u' của vốn u sẽ tỷ lệ với vốn đó với hệ số tỉ lệ k = 0,03 theo phương trình vi phân

$$u' = ku, \text{ trong đó } k = 0{,}03$$

Lúc này công thức (7) được suy ra trực tiếp từ công thức tổng quát (4)

3. Các thí dụ khác. Dao động đơn giản. Hàm mũ thường gặp được trong những tổ hợp phức tạp hơn. Chẳng hạn, hàm :

$$u = e^{-kx^2}, \qquad (8)$$

trong đó k — hằng số dương, là nghiệm của phương trình vi phân

$$u' = -2kxu.$$

Hàm (8) đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết xác suất và thống kê. Nó biểu thị, như ta thường nói, luật « phân bố chuẩn ».

Các hàm lượng giác u = cost và v = sint cũng thỏa mãn một phương trình vi phân đơn giản. Trước hết, ta để ý đến các hệ thức :

$$u' = -\sin t = -v, \quad v' = \cos t = u,$$

lập thành « một hệ hai phương trình vi phân với hai hàm ẩn ». Vi phân lần thứ hai, ta được:

$$u'' = -v' = -u, \quad v'' = u' = -v$$

Như vậy, hai hàm u và v của biến thời gian t có thể xem như nghiệm của cùng một phương trình vi phân:

$$z'' + z = 0 \qquad (9)$$

Đó là một phương trình vi phân « cấp hai » đơn giản tức là một phương trình chứa đạo hàm bậc hai của hàm z. Phương trình, đó hoặc chính xác hơn, là sự mở rộng của nó chứa hằng số dương k^2

$$z'' + k^2z = 0 \qquad (10)$$

(các nghiệm của phương trình này là các hàm $z = \cos kt$ và $z = \sin kt$) thường gặp trong khi nghiên cứu lý thuyết các dao động. Bởi thế các đường cong « hình sin » $u = \sin kt$ và $u = \cos kt$ (H.280) đã thu hút được sự chú ý của tất cả những ai nghiên cứu cấu trúc của các máy cơ học thực hiện hoặc sinh ra các chuyển động dao động.

Cần lưu ý rằng phương trình vi phân (10) là một trường hợp lý tưởng không có ma sát hoặc lực cản.

Trong phương trình vi phân của chuyển động dao động, sức cản được biểu thị bởi một số hạng rz', tức là phương trình sẽ có dạng

$$z'' + rz' + k^2z = 0 \qquad (11)$$

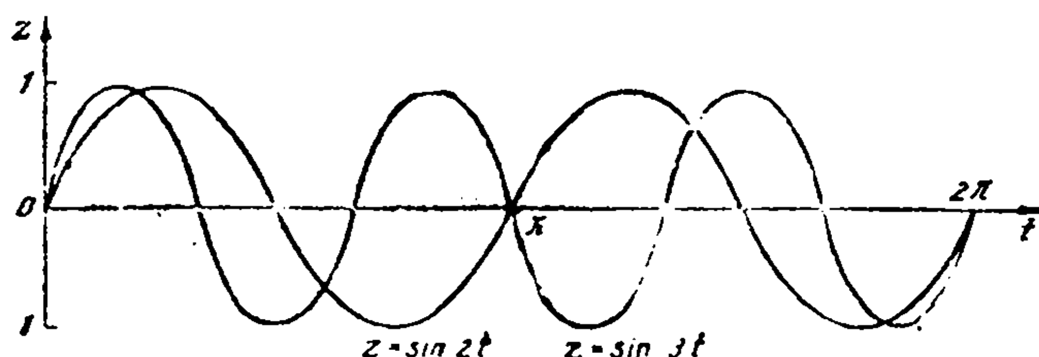
mà các nghiệm là các dao động « tắt dần » được biểu thị qua toán học bằng công thức

$$e^{\frac{rt}{2}}\cos\omega t \text{ hoặc } e^{\frac{rt}{2}}\sin\omega t; \quad \omega = \sqrt{k^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}.$$

Đồ thị được vẽ trên H.281 (Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại sự đúng đắn của các nghiệm đó bằng cách lấy vi phân) Các dao động tắt dần là cùng loại với các dao động hình sin nhưng biên độ của chúng giảm dần theo thời gian do sự vắng mặt thừa số mũ. Sự giảm nhanh hay chậm phụ thuộc vào độ lớn của hệ số ma sát r.

4. Định luật chuyền động của Niutơn. Tuy chúng ta không có ý định phân tích tỉ mỉ hơn nữa các hiện tượng tương tự, nhưng cũng phải bao hàm chúng trong một sơ đồ chung mà trên cơ sở đó Niutơn đã tiến hành một cuộc cách mạng thực sự trong cơ học và vật lý học.

Ta sẽ xét chuyển động của một phần tử nào đó có khối lượng m; ta biểu thị các tọa độ không gian của nó là những hàm của thời gian t: x(t), y(t), z(t). Như vậy, các thành phần của gia tốc sẽ bằng các đạo hàm bậc hai x''(t), y''(t), z''(t). Trong lịch sử khoa học thì sự kiện có ý nghĩa quyết định là nhận thức của Niutơn cho rằng các đại lượng mx'', my'', mz'' có thể được xem như các thành phần của lực tác dụng lên phần tử. Thoạt nhìn thì có thể cho rằng trong cách diễn đạt đó chỉ chứa định nghĩa hình thức của khái niệm « lực ». Nhưng thành công lớn của Niutơn là, lần đầu tiên ông đã cho định nghĩa này một tương ứng với các hiện tượng có thực trong tự nhiên. Vấn đề là dường như bản chất của tự nhiên là một trường lực mà ta có thể xem như đã biết khi mà ta còn chưa biết gì về chuyển động của một phần tử mà ta đang chú ý đến ở trong trường đó. Chiến công vĩ đại nhất của động học Niutơn là sự lý giải các định luật của Kêple và chuyển động của các hành tinh. Nó chứng tỏ sự hòa hợp hoàn toàn



H. 280. Dao động điều hòa

giữa các khái niệm toán học của Niutơn và các hiện tượng tự nhiên. Trước hết, Niutơn đã giả thiết lực hấp dẫn tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách. Nếu ta cho rằng mặt trời nằm tại gốc tọa độ của hệ thống và x,y,z là các tọa độ của hành tinh đã cho thì các thành phần của lực theo phương của ba trục tọa độ theo thứ tự sẽ bằng:

$$-k.\frac{x}{r^3}, -k.\frac{y}{r^3}, -k.\frac{z}{r^3},$$

trong đó k là một lực hấp dẫn không đổi không phụ thuộc vào thời gian, còn $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ là khoảng cách từ mặt trời đến hành tinh. Những biểu thức này xác định một trường lực độc lập với chuyển động của phần tử trong nó. Những dữ kiện đã biết đặc trưng cho trường này phải liên kết với định luật chuyển động tổng quát của Niutơn (tức là liên kết với các yếu tố động học và động lực học), khi cân bằng hai biểu thức véctơ phân biệt, ta được hệ ba phương trình vi phân:

$$mx'' = \frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

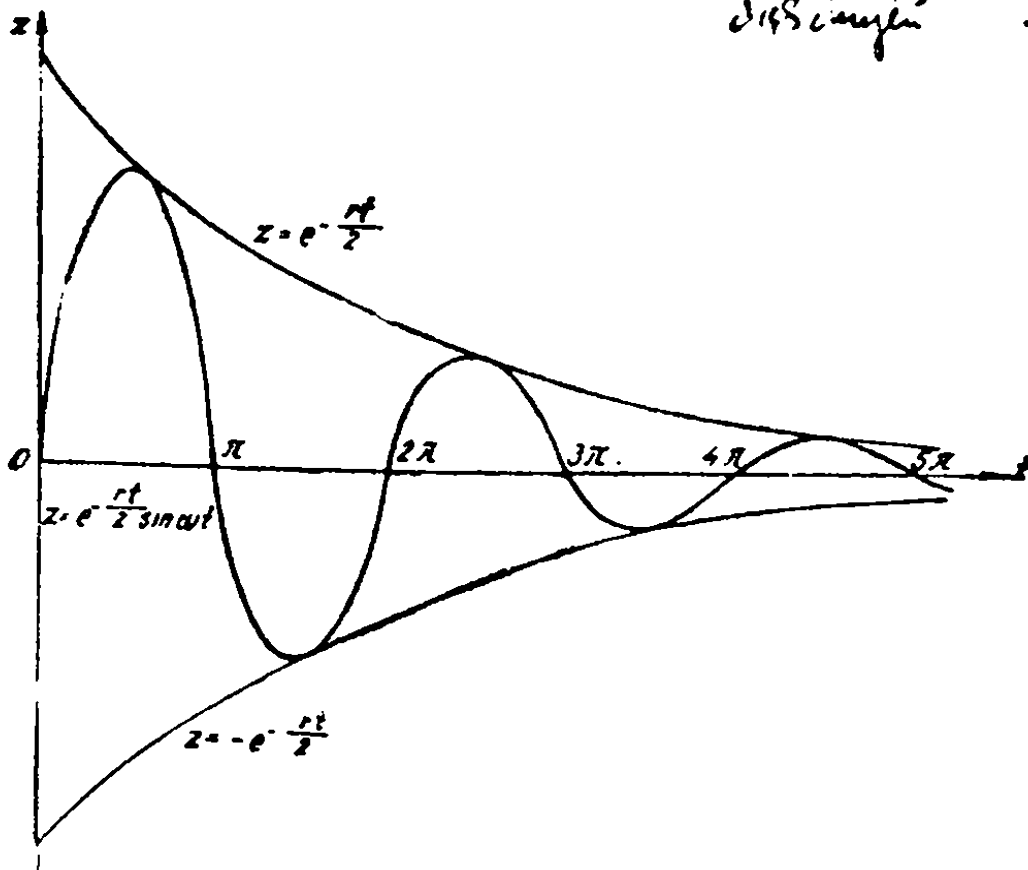
$$my'' = \frac{-ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$mz'' = \frac{-kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

với ba hàm ẩn x(t), y(t), z(t). Có thể giải được hệ này và khi đó sẽ phát hiện được một sự phù hợp hoàn toàn với quan sát thực nghiệm của Kèple về quĩ đạo của hành tinh là một thiết diện cônic với một trong các tiêu điểm là mặt trời và diện tích quét bởi một bán kính véctơ vạch từ mặt trời đến hành tinh trong

những khoảng thời gian bằng nhau thì bằng nhau và bình phương các chu kỳ quay đầy đủ của hai hành tinh xung quanh mặt trời tỉ lệ với lập phương các khoảng cách của chúng đến mặt trời. Chúng ta đành phải bỏ qua chứng minh của các khẳng định đó.

Bài toán về dao động đã cung cấp cho phương pháp của Niutơn một thể hiện sơ cấp hơn. Ta giả thiết có một phần tử chuyển động theo một đường thẳng (theo trục x) và liên kết với tọa độ gốc bởi một lực đàn hồi, thực hiện bởi một lò so hoặc một dây cao su. Nếu kéo phần tử khỏi vị trí cân bằng (ở gốc tọa độ) và đặt nó tại một điểm nào đó có tọa độ x thì lực sẽ kéo nó trở lại. Ta giả thiết lực này tỉ lệ với độ căng x. Vì lực đó



H. 281. Dao động tắt dần

hướng về gốc tọa độ cho nên nó được biểu thị dưới dạng $-k^2x$ trong đó $-k^2$ là một thừa số tỉ lệ âm biểu thị lực đàn hồi của lò so hoặc dây cao su. Ta giả thiết

thêm có lực ma sát làm chuyển động chậm lại và lực ma sát tỉ lệ với vận tốc x' của phần tử với hệ số tỉ lệ bằng — 1. Lúc đó lực tác dụng tại một thời điểm bất kỳ sẽ được biểu thị là $-k^2x - rx'$ và nêu vận dụng nguyên lý tổng quát của Niutơn ta sẽ đi đến phương trình $mx'' = -k^2x - rx'$ hoặc

$$mx'' + rx' + k^2x = 0.$$

Đây chính là phương trình vi phân (11) của các dao động tắt dần đã xét trước đây. Thí dụ đơn giản nói trên có một ý nghĩa lớn vì nhiều dao động của các hệ cơ học và điện học có thể ghi lại dưới hình thức toán học nhờ phương trình vi phân. Ở đây ta có một thí dụ điển hình về một diễn đạt toán học trừu tượng đã làm lộ rõ cấu trúc nội tại của nhiều hiện tượng riêng biệt dường như không có liên hệ gì với nhau. Kiểu trừu tượng tương tự đi từ một đặc điểm riêng của một hiện tượng cho trước đến một qui luật tổng quát chi phối một lớp rộng lớn các hiện tượng là đặc trưng của sự cắt nghĩa toán học các bài toán vật lý.

PHỤ LỤC CHƯƠNG VIII

§1. NHỮNG VẤN ĐỀ NGUYÊN LÝ

1. Tính khả vi. Để có khái niệm đạo hàm của một hàm $y = f(x)$ nào đó ta đã phải liên hệ với biểu tượng trực giác về tiếp tuyến với đồ thị của hàm đó. Nhưng, vì khái niệm hàm tổng quát rất rộng cho nên để chiếu cố đến tính hoàn chỉnh về mặt logic ta phải xóa bỏ sự phụ thuộc đó vào trực giác hình học. Thực vậy, hầu

như không thể bảo đảm rằng các tính chất trực quan nhìn được bằng mắt khi ta xem xét các đường cong đơn giản tương tự như đường tròn và elip lại vẫn còn đúng đối với đồ thị các hàm phức tạp hơn. Chẳng hạn ta xét hàm trên H.282, đồ thị của nó có điểm góc.

Hàm này được xác định bởi phương trình $y = x + |x|$ trong đó ký hiệu $|x|$ biểu thị giá trị tuyệt đối của x, nói cách khác:

$$y = x + x = 2x \qquad \text{nếu } x \geqslant 0$$
$$y = x - x = 0 \qquad \text{nếu } x < 0$$

Thí dụ khác về loại này là hàm $y = |x|$ hoặc hàm $y = x + |x| + (x - 1) + |x - 1|$. Đồ thị của những hàm này không có tiếp tuyến xác định tức là không có hướng xác định tại những điểm nào đó. Điều này có nghĩa là hàm sẽ không có đạo hàm tại các điểm tương ứng.

Ta nêu một thí dụ đơn giản về một loại hình không khả vi khác. Hàm $y = f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ thu được bằng cách nhân hàm $\sin\frac{1}{x}$ với thừa số x. Theo định nghĩa, ta đặt $f(x) = 0$ khi $x = 0$. Đồ thị của hàm này, với những giá trị dương của biến x, được biểu thị trên H.285 là liên tục ở mọi điểm. Đồ thị dao động vô hạn tại lân cận của điểm $x = 0$, các « sóng » sẽ nhỏ dần vô hạn nếu ta đi dần tới 0. Độ dốc của những sóng đó được cho bởi công thức:

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

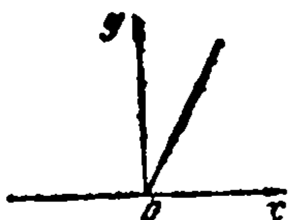
(đề nghị bạn đọc kiểm tra lại để luyện tập); khi x dần tới 0, độ dốc này dao động giữa mọi giới hạn âm và dương ngày càng tăng. Ta thử tìm đạo hàm tại $x = 0$ bằng cách cho tỉ số các số gia qua giới hạn khi $h \to 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

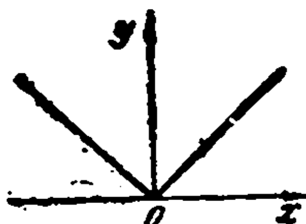
Nhưng khi $h \to 0$ thì tỷ số này dao động giữa -1 và $+1$ và không tới một giới hạn nào. Do đó hàm sẽ không khả vi tại $x = 0$.

Những thí dụ đó đã chỉ ra những khó khăn có trong bản thân vấn đề. Vaierstrax đã minh họa cực kỳ rõ vấn đề này sau khi đã xây dựng một hàm liên tục mà đồ thị của nó không có đạo hàm tại một điểm nào cả. Trong khi mà tính khả vi kéo theo tính liên tục thì qua thí dụ này tính liên tục hoàn toàn không kéo theo tính khả vi. Thực vậy, hàm Vaierstrax liên tục khắp nơi nhưng lại không khả vi ở khắp nơi. Trong thực tế ta sẽ không gặp phải những khó khăn loại này. Những đường cong thường gặp là đường cong « trơn » (chỉ loại trừ những điểm cô lập riêng biệt) tức là không những có thể vi phân nó, mà đạo hàm của nó còn liên tục. Trong trường hợp này, cái gì đã ngăn cản chúng ta nói trước rằng không có hiện tượng « bệnh lý » nào có mặt trong các bài toán thuộc loại đang xét? Đó chính là một vấn đề trong giải tích mà chỉ những người quan tâm đến các hàm khả vi mới thấy được.

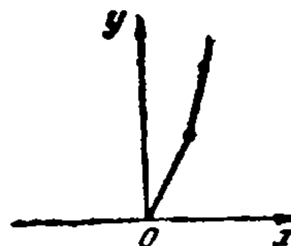
Trong chương VIII, ta đã lấy vi phân một lớp rộng rãi các hàm và bản thân việc đó đã chứng minh tính khả vi của chúng. Vì tính khả vi của một hàm không phải là một tất yếu logic cho nên, với quan điểm toán học, nó phải hoặc là tiên đề hóa, hoặc là được chứng minh. Trong trường hợp này, bản thân khái niệm về



H. 282
$y = x + |x|$

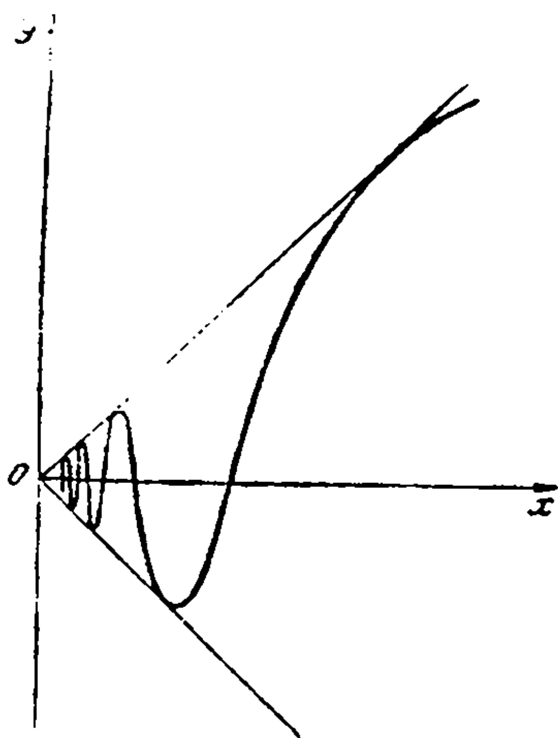


H. 283
$y = |x|$



H. 284
$y = x + |x| + (x-1) + |x-1|$

tiếp tuyến hoặc về hướng của đường cong (nguồn gốc ban đầu của tư tưởng đạo hàm) được liên hệ với định nghĩa giải tích thuần túy của đạo hàm, nếu hàm $y = f(x)$ khả vi tức là nếu tỉ số số gia $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ có giới hạn duy nhất $f'(x)$ khi dần tới 0 từ cả hai phía thì ta nói rằng đường cong tương ứng sẽ có tiếp tuyến với độ dốc $f'(x)$. Như vậy, do tính chặt chẽ về mặt logic, quan niệm ngây thơ của Fecma, Lâybnitx và Niutơn đã bị lật đổ trong giải tích hiện đại.



H. 285. $y = x\sin\frac{1}{x}$

2. Tích phân: Điều tương tự cũng xảy ra với tích phân của một hàm liên tục $f(x)$. Đáng lẽ phải hiểu phần diện tích ở dưới đường cong như là một đại lượng tồn tại khách quan, đại lượng

này được biểu thị nhờ giới hạn của một dãy các tổng hữu hạn thì trong giải tích, giới hạn này được thừa nhận làm *định nghĩa* của tích phân. Khái niệm đó về tích phân là cơ sở có trước, từ đấy sẽ suy ra khái niệm diện tích. Chúng ta buộc phải đứng trên quan điểm này vì ý thức được rằng trực giác hình học là mơ hồ khi nó được áp dụng vào những khái niệm giải tích tổng quát như hàm liên tục. Ta bắt đầu từ việc xây dựng một tổng

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\,\Delta x_j \qquad (1)$$

trong đó $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ là các điểm chia của khoảng tích phân; $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ là số gia của biến x hoặc độ dài của khoảng cách thành phần thứ j; v_j là một giá trị tùy ý của biến x trong khoảng đó tức là $x_{j-1} \leqslant v_j \leqslant x_j$ (ta có thể lấy $v_j = x_j$ hoặc $v_j = x_{j-1}$).

Sau đó ta lập một dãy các tổng tương tự trong đó số n các khoảng thành phần tăng lên và độ dài của khoảng thành phần cực tiểu dần tới 0. Lúc này, mệnh đề cơ bản sau đây sẽ đúng: tổng S_n thành lập cho một hàm liên tục f(x) cho trước sẽ dần tới một giới hạn A xác định không phụ thuộc vào phương pháp chia khoảng tích phân và sự lựa chọn các điểm v_j. Theo

định nghĩa, giới hạn này là tích phân $A = \int_a^b f(x)dx$.

Tất nhiên, sự tồn tại giới hạn này phải được chứng minh bằng giải tích nếu như ta không muốn dựa vào biểu tượng trực giác về diện tích. Chứng minh này được trình bày trong mọi cuốn sách giáo khoa về giải tích với yêu cầu thật chặt chẽ về mặt toán học.

Việc so sánh phép vi phân và phép tích phân dẫn ta đến sự đối chiếu sau đây. Tất nhiên, tính khả vi chỉ giới hạn ở trên lớp các hàm liên tục, trong khi đó thì trên thực tế, việc thực hiện các phép vi phân lại được quy về những quy trình chỉ dựa vào những quy tắc đơn giản. Trái lại, mỗi hàm liên tục đều khả tích mà không có ngoại lệ vì nó có tích phân ở giữa hai cận bất kỳ cho trước. Tuy nhiên, việc tính trực tiếp các tích phân xem như giới hạn của các tổng nói chung là rất khó, ngay cả đối với những hàm đơn giản nhất. Nhưng trong nhiều trường hợp, gần như định lý cơ bản của giải tích là công cụ quyết định khi thực hiện phép tích phân. Đối với đa số các hàm, trong số đó có các hàm hoàn toàn sơ cấp, phép tích phân đã không cho được những biểu thức tường minh. Việc tính tích phân bằng số đòi hỏi phải có các phương pháp có hiệu quả hơn.

3. Những ứng dụng khác của khái niệm tích phân. Công. Độ dài của đường cong. Sau khi đã tách quan niệm giải tích về tích phân ra khỏi thể hiện hình học ban đầu của nó, ta còn gặp một loạt các thể hiện và ứng dụng không kém phần quan trọng khác của khái niệm cơ bản này. Chẳng hạn, trong cơ học thì tích phân được thể hiện ở biểu thức của công. Chỉ cần giải thích điều này qua một thí dụ đơn giản. Ta giả thiết một khối lượng nào đó chuyển động theo trục x dưới tác dụng của một lực hướng dọc theo trục đó. Ta sẽ xem như toàn bộ khối lượng tập trung tại một điểm có tọa độ x và lực được cho trước như một hàm f(x) trong đó dấu của hàm f(x) chỉ hướng của lực. Nếu lực không đổi và ta chuyển dịch khối lượng từ điểm a đến điểm b thì công mà nó thực hiện sẽ bằng tích của lực f với quãng đường mà khối lượng đã đi: $(b - a)f$.

Nhưng nếu lực biến thiên cùng với x thì ta sẽ xác định công tổng cộng sinh ra nhờ quá trình giới hạn (tương tự như trước đây ta đã xác định vận tốc). Muốn vậy, ta phân chia khoảng từ a đến b thành những khoảng nhỏ bằng các điểm $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots$, $x_n = b$, sau đó ta giả thiết trong mỗi khoảng thành phần thì lực không đổi và bằng đại lượng f(x) chẳng hạn, là giá trị thực của lực tại một điểm hữu hạn và ta sẽ tính được công tương ứng với lực « bậc thang » như vậy:

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\Delta x_\nu.$$

Bây giờ, nếu ta làm cho các khoảng chia nhỏ đi như trước đây bằng cách tăng n vô hạn, ta nhận thấy tổng này dần tới tích phân

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Như vậy, nhờ tích phân ta xác định được công do một lực biến thiên liên tục đã thực hiện.

Đặc biệt, nếu ta xét khối lượng m liên kết với gốc tọa độ $x = 0$ nhờ một lò so dàn hồi. Lực f(x) sẽ tỉ lệ với x theo lập luận trước dây

$$f(x) = -k^2x$$

trong đó k là một hằng số dương. Lúc này, công do lực đó thực hiện khi chuyển động khối lượng m từ gốc tọa độ đến điểm b được biểu thị bởi tích phân:

$$\int^{0}\left(-k^2x\right)dx = -k^2\frac{b^2}{2},$$

còn công mà ta phải tiêu phí để căng lò so tới điểm b thì bằng $+ k^2 \frac{b^2}{2}$.

Một ứng dụng của khái niệm tích phân tổng quát là việc tính độ dài cung của đường cong. Ta giả thiết phần đường cong đang xét được biểu thị bởi hàm $y = f(x)$, đạo hàm của nó $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ cũng là một hàm liên tục. Muốn xác định độ dài, ta sẽ hành động đúng như khi ta phải đo độ dài đường cong bằng thước chia độ với các mục đích thực tiễn. Nội tiếp trong cung AB một đường gấp khúc với n cạnh nhỏ, ta đo độ dài tổng cộng (chu vi) L_n của đường gấp khúc đó và xem độ dài đó như một xấp xỉ nào đó, ta cho n tăng và cho cạnh lớn nhất trong các cạnh của đường gấp khúc dần tới 0, bây giờ ta được giới hạn sau đây với tư cách là độ dài cung AB

$$L = \lim L_n.$$

(Cũng bằng cách này ta đã tìm được độ dài đường tròn xem như giới hạn của chu vi đa giác đều n cạnh nội tiếp). Có thể chứng minh đối với những đường cong đủ trơn thì giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn dãy các đường gấp khúc nội tiếp. Những đường cong có tính chất đó gọi là *cầu trường được*. Mọi đường cong «đứng đắn» mà ta gặp trong lý thuyết hoặc trong các ứng dụng của chúng là cầu trường được. Chúng ta sẽ không đi sâu nghiên cứu các trường hợp «bệnh lý». Chỉ cần chứng minh rằng đối với hàm $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục, cung AB sẽ có độ dài L theo ý nghĩa đã nêu và có thể biểu thị độ dài L nhờ một tích phân.

Muốn vậy, ta ký hiệu hoành độ của các điểm A và B theo thứ tự là a và b, rồi giống như trước đây ta chia khoảng từ a đến b bởi các điểm $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n = b$ với các số gia $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ và xét một đường gấp khúc với các đỉnh x_j, $y_j = f(x_j)$ nằm phía trên các điểm chia. Độ dài của một cạnh của đường gấp khúc được biểu thị bởi công thức

$$\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} =$$

$$= \Delta x_j \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}\right)^2}.$$

Do đó, đối với độ dài tổng cộng của đường gấp khúc ta có biểu thức:

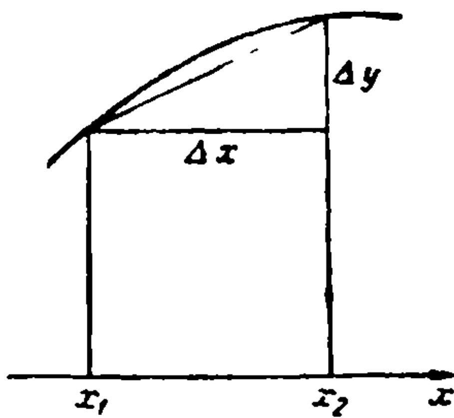
$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}\right)^2} \Delta x_j.$$

Nếu cho n dần tới vô cực thì tỉ số $\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}$ sẽ dần tới đạo hàm $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; đối với độ dài L, ta có biểu thức tích phân:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (2)$$

Ta sẽ không tiếp tục chi tiết các lập luận lý thuyết đó mà chỉ nêu ra hai chú ý bổ sung. Một là, nếu coi điểm B là điểm chuyển động trên đường cong đã cho với hoành độ x thì $L = L(x)$ là một hàm của biến x và theo định lý cơ bản, ta có công thức

$$L'(x) = \frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$



H.286. Để xác định độ dài cung

Hai là, tuy rằng công thức (2) cho lời giải «tổng quát hơn» của bài toán tìm độ dài cung, nhưng ít khi nó giúp ta tìm được một biểu thức tường minh của độ dài đó trong những trường hợp riêng biệt. Thực vậy, để thu được giá trị bằng số của độ dài cung, ta phải thế hàm f(x) đã cho, hoặc chính xác hơn, thế f'(x) vào công thức (2) rồi thực hiện phép lấy tích phân biểu thức thu được. Nhưng, ở đây sẽ nảy ra những khó khăn không vượt qua được, nếu ta chỉ giới hạn trong phạm vi các hàm số sơ cấp xét đến trong cuốn sách này. Ta chỉ ra một số ít trường hợp có thể tích phân được. Hàm

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

có đồ thị là đường tròn đơn vị; đối với hàm này ta có

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ suy ra } \sqrt{1 + [f'(x)^2]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

do đó, độ dài cung tròn được biểu thị bởi tích phân

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a.$$

Đối với trường hợp parabol $y = x^2$ ta có $f'(x) = 2x$, độ dài cung từ $x = 0$ đến $x = b$ sẽ bằng:

$$\int_0^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Đối với đường cong $y = \ln \sin x$ ta có $f'(x) = \text{ctg} x$ và độ dài cung được biểu thị bởi tích phân

$$\int_0^b \sqrt{1 + \text{ctg}^2 x}\, dx.$$

Ta tạm bằng lòng với cách viết các biểu thức tích phân này chỉ vì nó đơn giản. Có thể tính được chúng nếu áp dụng một số kỹ thuật lấy tích phân khác tiến bộ hơn so với những kỹ thuật mà ta đã biết, nhưng ta sẽ không đi xa hơn nữa theo hướng này.

§2. CẤP BẬC CỦA SỰ TĂNG

1. Hàm mũ và các lũy thừa của biến x : Trong toán học ta thường gặp những dãy số có giới hạn vô hạn. Thường thường ta cần so sánh một dãy như vậy với một dãy khác. Chẳng hạn dãy số b_n cũng dần tới vô hạn nhưng có thể «nhanh hơn» dãy số a_n. Ta chính xác hóa khái niệm này: b_n dần tới vô hạn nhanh hơn hoặc b_n có bậc tăng cao hơn a_n nếu tỉ số $\frac{a_n}{b_n}$ (trong đó cả tử số và mẫu số đều dần tới vô hạn) dần tới 0 khi n tăng. Thí dụ, dãy $b_n = n^2$ dần tới vô hạn nhanh hơn dãy $a_n = n$ đến lượt nó, dãy $a_n = n$ tăng nhanh hơn dãy $c_n = \sqrt{n}$, bởi vì

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{c_n}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Rõ ràng, n^s dần tới vô hạn nhanh hơn n^r khi $s > r > 0$ bởi vì $\frac{n^r}{n^s} = \frac{1}{n^{s-r}} \to 0.$

Nếu tỉ số $\frac{a_n}{b_n}$ dần tới một hằng số c hữu hạn nào đó khác 0 thì ta nói rằng hai dãy a_n và b_n dần tới vô hạn với vận tốc bằng nhau hoặc chúng *có bậc tăng như nhau*. Chẳng hạn, $a_n = n^2$ và $b_n = 2n^2 + n$ có cùng một bậc tăng vì

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{2n^2+n} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}.$$

Có thể nảy ra ý nghĩ cho rằng sự tăng của một dãy a_n bất kỳ với giới hạn vô hạn có thể đo được nhờ các lũy thừa n cũng như một đoạn thẳng bất kỳ đo được bằng thước có chia độ. Muốn thế có lẽ chỉ cần tìm một lũy thừa n^s thích hợp có cùng bậc tăng với a_n tức là tìm một số n^s sao cho tỉ số $\frac{a_n}{n^s}$ dần tới một số không đổi hữu hạn khác 0 nào đó. Nhưng có điều rất đặc biệt là không phải bao giờ cũng làm được như vậy vì *hàm mũ a^n khi $a > 1$ (thí dụ e^n) dần tới vô hạn nhanh, hơn bất kỳ lũy thừa n^s nào dù mũ s lớn đến đâu, mặt khác, hàm $\ln x$ dần tới vô hạn chậm hơn bất kỳ lũy thừa n^s dù số mũ dương s nhỏ tùy ý.* Nói cách khác ta có hệ thức

$$\frac{n^s}{a^n} \to 0 \qquad (1) \qquad\qquad \frac{\ln x}{n^s} \to 0 \qquad (2)$$

khi $n \to \infty$. Ta để ý rằng số mũ s không bắt buộc phải nguyên nó có thể là một số *dương* xác định bất kỳ. Muốn chứng minh hệ thức (1) ta khai căn bậc s hệ thức

đó, biểu thức dưới căn rõ ràng cũng dần tới 0 cùng với căn thức. Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh rằng:

$$\frac{n}{a^{\frac{n}{s}}} \to 0 \qquad \text{khi n tăng}$$

Giả sử $b = a^{\frac{1}{s}}$. Theo giả thiết thì a lớn hơn đơn vị cho nên cả b và $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$ cũng lớn hơn 1. Có thể viết

$$b^{\frac{1}{2}} = 1 + q$$

trong đó q dương. Bây giờ, theo bất đẳng thức (6) ở 5°, §2 chương I:

$$b^{\frac{n}{2}} = (1 + q)^n \geqslant 1 + nq > nq,$$

tức là $a^{\frac{n}{s}} = b^n > n^2q^2$

và do đó $\quad \dfrac{n}{a^{\frac{n}{s}}} < \dfrac{n}{n^2q^2} = \dfrac{1}{nq^2}.$

Vì biểu thức bên phải dần tới 0 khi $n \to \infty$, chứng minh kết thúc.

Cần chú ý rằng hệ thức $\dfrac{x^s}{a^x} \to 0$ (3)

vẫn còn đúng khi x dần tới vô hạn bằng *cách chạy tùy ý* qua một dãy $x_1, x_2, \ldots$ có thể không trùng với dãy

1, 2, 3 ... các số nguyên dương. Thực vậy, khi $n - 1 \leqslant x \leqslant n$ ta có:

$$\frac{a^s}{x^x} < \frac{n^s}{a^{n-1}} = a.\frac{n^s}{a^n} \to 0$$

Chú ý này có thể dùng để chứng minh hệ thức (2)

Nếu đặt $x = \ln n$ và $e^s = a$ tức là $n^s = (e^s)^x$ thì phân số ở vế trái của (2) sẽ có dạng

$$\frac{x}{a^x},$$

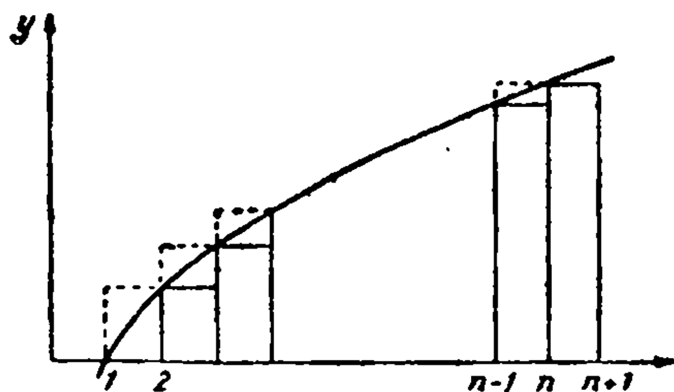
và ta đã đi đến biểu thức có trong hệ thức (3) khi $s = 1$

2. **Bậc tăng của hàm ln (n!)** Trong nhiều ứng dụng, như trong lý thuyết xác suất chẳng hạn, điều quan trọng là biết bậc tăng hoặc « hành vi tiệm cận » của biểu thức (n!) với những giá trị n rất lớn. Ta sẽ nghiên cứu logarit của (n!) tức là biểu thức

$$P_n = \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n.$$

Ta sẽ chứng minh giá trị tiệm cận của P_n có thể là tích nln (n) tức là:

$$\frac{\ln(n)}{n\ln n} \to 1 \text{ khi } n \to \infty.$$



H.287. Đánh giá ln(n!)

Ta chứng minh như vẫn thường làm khi phải so sánh một tổng với một tích phân. Trên H.287, tổng P_n bằng tổng các diện tích của các đa giác, các cạnh trên của chúng được biểu thị bởi các

đường đậm và diện tích tổng cộng của chúng không vượt quá diện tích ở dưới đường cong logarit

$$\int_0^{n+1} \ln x dx = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1$$

trong khoảng từ 0 đến n + 1. Đồng thời, tổng P_n bằng tổng các diện tích hình chữ nhật mà các cạnh bên của chúng được biểu thị bằng các đường chấm chấm và diện tích ở dưới đường cong đó trong khoảng từ 1 đến n:

$$\int_1^n \ln x dx = n\ln n - n + 1.$$

Do đó ta có:

$$n\ln n - n + 1 < P_n < (n+1)\ln(n+1) - n$$

Chia các đẳng thức này cho nhau, ta có

$$1 - \ln n + \frac{1}{n\ln n} < \frac{P_n}{n\ln n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} -$$

$$- \frac{1}{\ln n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n}$$

Tất nhiên, cả cận dưới và cận trên bao hàm tỉ số $\frac{P_n}{n\ln n}$ đều dần tới đơn vị. Do đó khẳng định của ta đã được chứng minh.

§ 3. CHUỖI VÔ HẠN VÀ TÍCH VÔ HẠN

1. Chuỗi vô hạn của hàm. Ta đã nhiều lần có dịp chỉ ra rằng khi biểu thị đại lượng s dưới dạng « tổng của một chuỗi vô hạn »

$$s = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \qquad (1)$$

ta không khẳng định cái gì khác ngoài s là giới hạn của một dãy các tổng riêng hữu hạn khi n tăng:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

trong đó $s = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. (2)

Như vậy đẳng thức (1) tương đương với hệ thức giới hạn: $\lim s_n = s$ khi $n \to \infty$ (3)

trong đó s_n được xác định nhờ (2). Nếu giới hạn (3) tồn tại thì ta nói rằng chuỗi (1) *hội tụ* đến giá trị s, trái lại, nếu giới hạn (3) không tồn tại thì ta nói rằng chuỗi đó phân kỳ.

Thí dụ, chuỗi:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

hội tụ đến giá trị $\frac{\pi}{4}$, còn chuỗi:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

hội tụ đến giá trị ln2; nhưng trái lại, chuỗi:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

phân kỳ bởi vì các tổng riêng ở đây xen kẽ khi bằng 1, khi bằng 0, chuỗi:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

phân kỳ bởi vì các tổng riêng dần tới vô hạn.

Ta cũng đã gặp những chuỗi mà số hạng tổng quát của chúng là một hàm biến x có dạng:

$$b_i = c_i x_i$$

trong đó c_i không phụ thuộc vào x. Những chuỗi như vậy được gọi là *chuỗi lũy thừa*, đối với chúng thì tổng riêng là các đa thức

$$s_n = c_0 + c_1x = c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

việc thêm hằng số c_0 chỉ đòi hỏi làm thay đổi không đáng kể cách ký hiệu trong công thức (2).

Bởi thế, một phân tích dưới dạng chuỗi lũy thừa của hàm f(x):

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots +$$

là một trong những phương pháp biểu thị xấp xỉ hàm f(x) nhờ các hàm đơn giản nhất — các đa thức. Tóm tắt các kết quả có trước đây và bổ sung thêm, ta có bảng liệt kê các phân tích thành chuỗi lũy thừa mà ta đã biết sau đây:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$(\text{đúng khi } -1 < x < +1) \qquad (4)$$

$$\text{arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(\text{đúng khi } -1 \leqslant x \leqslant +1) \qquad (5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$(\text{đúng khi } -1 < x \leqslant +1) \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$(\text{đúng khi } -1 < x < +1) \qquad (7)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(dúng với mọi x) (8)

Thêm vào đó còn có hai phân tích quan trọng

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(dúng với mọi x) (9)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

(dúng với mọi x) (10)

Chứng minh của những phân tích này được xem như hệ quả đơn giản của các hệ thức (xem § 5 chương 8):

a) $\int_0^x \sin u du = 1 - \cos x$

b) $\int_0^x \cos u du = \sin x.$

Ta xuất phát từ bất đẳng thức hiển nhiên:

$$\cos x \leqslant 1.$$

Tích phân từ 0 dến x, trong đó x là một số dương xác định. Theo công thức (13) ở 5, § 1 chương VIII ta có:

$$\sin x \leqslant x.$$

Tích phân một lần nữa ta được:

$$1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$$

tương đương với

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Tích phân bất đẳng thức này, ta có:

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{2.3} = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Kéo dài vô hạn phương pháp này ta được hai loại bất đẳng thức.

$\sin x \leqslant x$ $\qquad$ $\cos x \leqslant 1$

$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}$ $\qquad$ $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2!}$

$\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\qquad$ $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{7!} - \frac{x^7}{5!}$ $\qquad$ $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

. . . .

Bây giờ ta chứng minh khi n tăng vô hạn sẽ có hệ thức $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

Muốn chứng minh điều này ta chọn một số m xác định nào đó sao cho $\frac{x}{m} < \frac{1}{2}$ và dựa vào ký kiệu $C = \frac{x^m}{m!}$. Ta biểu thị một số nguyên bất kỳ $n > m$ dưới

dạng tổng $n = m + r$, khi đó: $0 < \frac{x^m}{n!} = c\frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2}$ $\dots \frac{x}{m+r} < c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r$; bởi vì từ $n \to \infty$ suy ra $r \to \infty$ cho nên $c\left(\frac{1}{2}\right)^r \to 0$.

Suy ra các đồng nhất thức sau là đúng:

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

Vì các số hạng của những chuỗi này giảm đi do đổi dấu xen kẽ (ít nhất khi $|x| \leqslant 1$) cho nên *sai số mắc phải khi cắt đi từ mỗi chuỗi một số hạng nào đó sẽ không vượt quá giá trị tuyệt đối của số hạng bỏ đi đầu tiên.*

Khi lập các bảng số ta có thể dùng các chuỗi này.

Thí dụ: sin 1° bằng bao nhiêu? 1° bằng số đo radian $\frac{\pi}{180}$, do đó

$$\sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \dots$$

Nếu chỉ hạn chế ở hai số hạng đã viết thì sai số mắc phải sẽ không vượt quá số $\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{108}\right)^5$, số này nhỏ hơn 0,00000000002. Như vậy, $\sin 1° \approx 0{,}0174524064$ với 10 chữ số thập phân.

Cuối cùng ta nhắc lại « chuỗi nhị thức »

$(1 + x)^a = 1 + ax + C_2^a x^2 + C_3^a x^3 + \ldots$ (11) trong đó C_s^a là « hệ số nhị thức »

$$C_s^a = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-s+1)}{s!}$$

nếu $a = n$ là một số nguyên dương thì $C_n^a = 1$ và trong công thức (11) mọi hệ số C_s^a với $s > n$ triệt tiêu, ta được một công thức hữu hạn của định lý nhị thức thông thường. Một trong những phát minh vĩ đại ban đầu của Niutơn là ông đã mở rộng định lý nhị thức với mọi giá trị có thể được của số mũ a dương hoặc âm, hữu tỷ hoặc vô tỉ. Nếu a không phải là số nguyên dương thì vế phải của công thức (11) sẽ cho một chuỗi vô hạn hội tụ đến giá trị bằng vế trái với $-1 < x < +1$. Nếu $|x| > 1$ thì chuỗi (11) phân kỳ và dấu của đẳng thức mất ý nghĩa.

Đặc biệt, nếu thay giá trị $a = \frac{1}{2}$ vào công thức (11)

ta được phân tích :

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!\,2^2}x^2 + \frac{1.3}{3!\,2^3}x^3 - \frac{1.3.5}{4!\,2^4}x^4 + \ldots \quad (12)$$

Cũng như các nhà toán học khác của thế kỷ XVIII, Niutơn không nêu ra chứng minh của mình, mãi đến thế kỷ thứ XIX còn chưa có được một sự phân tích thỏa đáng về tính hội tụ và giới hạn mà tại đó khai triển là đúng cho những chuỗi tương tự.

Các phân tích từ (4) đến (11) là những trường hợp riêng của công thức *Taylo* (1685 — 1731) cho khai triển của hàm f(x) thành chuỗi lũy thừa có dạng:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (13)$$

Phát hiện ra quy luật biểu thị các hệ số c_i của chuỗi này nhờ hàm f(x) và các đạo hàm của nó, ta có thể khẳng định sự đúng đắn của khai triển này đối với một lớp hàm rất rộng.

Ta không thể dẫn ra ở đây chứng minh chặt chẽ cho công thức Taylo, cũng không thể phát biểu chính xác những điều kiện tại đó công thức đúng. Nhưng những điều dễ hiểu sau đây sẽ làm sáng tỏ một phần nào những quan hệ tương hỗ và những sự kiện quan trọng có liên quan.

Ta giả thử khai triển (13) là có thể được. Giả thiết thêm rằng hàm f(x) là khả vi, đạo hàm f'(x) của nó cũng khả vi v.v... tức là có mỗi dãy vô hạn các đạo hàm

$$f'(x), f''(x), \dots f^{(n)}(x), \dots$$

Cuối cùng ta vi phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa vô hạn tương tự như đối với đa thức hữu hạn mà không để ý đến sự hợp pháp của qui trình đó. Sau mọi giả thiết như vậy ta có thể tính các hệ số c_n nếu biết dáng điệu của hàm f(x) tại lân cận điểm x = 0. Trước hết thay x = 0 vào công thức (13) ta có:

$$c_0 = f(0)$$

vì mọi số hạng của chuỗi chứa biến x sẽ biến mất. Vi phân đồng nhất thức (13) ta được:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots ; \quad (13')$$

thay x = 0 một lần nữa nhưng bây giờ vào công thức (13') ta có

$$c_1 = f'(0)$$

vi phân (13') ta có

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \ldots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \ldots \quad ;(13'')$$

rồi thay $x = 0$ vào công thức (13'') ta có

$$2!\, c_2 = f''(0)$$

Tương tự, vi phân (13'') rồi thay $x = 0$ ta được

$$3!\, c_3 = f'''(0)$$

tiếp tục như vậy, ta được công thức tổng quát cho hệ số c_n:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0),$$

trong đó $f^{(n)}(0)$ là đạo hàm bậc n của hàm $f(x)$ khi $x = 0$. Kết quả, ta được chuỗi Taylo:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) \qquad (14)$$

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại các hệ số của các chuỗi (4) — (11) theo qui luật này để luyện tập.

2. Công thức Ơle $\cos x + i\sin x = e^{ix}$. Một trong những thành tựu chói lọi nhất mà Ơle đạt được nhờ những thủ thuật có tính chất hình thức của mình là mối liên hệ chặt chẽ ở bên trong miền biến phức giữa một bên là hàm sin và cosin và một bên là hàm mũ. Cần phải nói trước là cả «chứng minh» của Ơle và những lý lẽ tiếp tục sau đây đều không chặt chẽ. Đó là những thí dụ về tính toán bằng chữ một cách hình thức điển hình thể hiện niềm tin vào sức mạnh của ký hiệu toán học của thế kỷ XVIII.

Ta bắt đầu từ đồng nhất thức Moavrơ đã chứng minh trong chương II:

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

Phép thế $\varphi = \frac{x}{n}$ đưa ta đến hệ thức

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

Nếu x cố định thì $\cos\frac{x}{n}$ sẽ ít phân biệt với $\cos 0 =$ $= 1$ khi n tăng vô hạn. Vì:

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to 1 \text{ khi } \frac{x}{n} \to 0$$

cho nên $\sin\frac{x}{n}$ tiệm cận bằng $\frac{x}{n}$. Vì thế có thể coi sự qua giới hạn sau đây là tất nhiên

$$\cos x + i\sin x = \lim\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n \text{ khi } n \to 0.$$

Biến đổi vế phải của đẳng thức này theo công thức

$$e^z = \lim\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ khi } n \to \infty$$

ta được hệ thức:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

Đó là kết quả mà Ơle đã tìm ra.

Ta có thể suy ra công thức này và các công thức khác (cũng bằng con đường hình thức) từ khai triển của hàm e^z

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

bằng cách đặt ix thay cho z (x là số thực). Nếu ta nhớ lại rằng các lũy thừa liên tiếp của số i là các số i, – 1, – i, + 1... lặp lại một cách chu kỳ, cho nên nếu gộp các phần thực và phần ảo, ta có :

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right);$$

tiếp tục thay thế các chuỗi trong vế phải bằng các tổng cosx và sinx, ta lại tìm được công thức Ơle.

Một lập luận như thế hoàn toàn không phải là một chứng minh thực sự của hệ thức (15). Có thể không tán thành «kết luận» thứ hai ở chỗ khai triển thành chuỗi của hàm e^z đã được thực hiện với giả thiết z là số thực, bởi vậy phép thế z = ix là hợp lý với những điều kiện bổ sung, cũng hoàn toàn như vậy, giá trị của lập luận đầu tiên sẽ mất đi bởi vì công thức:

$$e^z = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ khi } n \to \infty$$

đã được suy ra trước đây chỉ cho những giá trị thực z. Để cho công thức Ơle trong phạm vi hình thức chủ nghĩa thuần túy chuyền sang phạm vi những chân lý toán học chặt chẽ, phải có sự phát triển của lý thuyết hàm biến phức — một trong những thành tựu vĩ đại nhất trong thế kỉ XIX. Nhiều vấn đề sâu sắc khác đã khêu gợi cho sự phát triển đó. Chẳng hạn, ta thấy rằng các khoảng hội tụ của khai triển các hàm khác nhau thành các chuỗi lũy thừa thì khác nhau. Tại sao một số khai triển hội tụ khắp nơi tức là với mọi giá trị của x, trong khi đó thì khai triển khác lại mất ý nghĩa khi

$|x| > 1$. Thí dụ, ta hãy xét cấp số nhân (4) trang 187, nó hội tụ khi $|x| < 1$. Vế trái của đẳng thức này hoàn toàn có nghĩa khi $x = 1$ tức là bằng $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, trong khi đó thì chuỗi ở vế phải lại rất lạ: nó có dạng $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Chuỗi này không hội tụ vì các tổng riêng của nó dao động giữa 1 và 0. Điều này chứng tỏ một hàm có thể sinh ra một chuỗi phân kỳ ngay cả trong trường hợp bản thân nó không thể hiện một bất thường nào. Thực ra thì hàm $\frac{1}{1+x}$ trở nên vô hạn khi $x = -1$. Vì ta chứng minh được dễ dàng tính hội tụ của một chuỗi lũy thừa tại điểm $x = a > 0$ kéo theo tính hội tụ trong khoảng $-a < x < a$ cho nên ta có thể thấy được «sự giải thích» hành vi lạ lùng của khai triển trong sự gián đoạn của hàm $\frac{1}{1+x}$ tại $x = -1$

Bây giờ ta xét hàm $\frac{1}{1+x^2}$. Nó được khai triển thành chuỗi:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

bằng cách thay x bằng x^2 trong công thức (4). Chuỗi thu được cũng hội tụ khi $|x| < 1$, đồng thời khi $x = 1$

một lần nữa nó lại dẫn đến chuỗi $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$; khi $|x| > 1$ nó phân kỳ, song bản thân hàm lại xác định ở khắp nơi.

Có lẽ chỉ có thể giải thích đầy đủ những hiện tượng này khi hàm được nghiên cứu trong miền các giá trị phức của biến x, chứa cả những giá trị thực cũng như những giá trị ảo của nó. Chẳng hạn đối với hàm $\frac{1}{1+x^2}$ thì chuỗi phải phân kỳ khi $x = i$ bởi vì mẫu của phân thức triệt tiêu với giá trị đó của biến. Từ đó suy ra chuỗi phải phân kỳ với những giá trị sao cho $|x|>|i|=1$ vì có thể chứng minh rằng tính hội tụ của nó với một giá trị x như vậy sẽ kéo theo tính hội tụ của nó khi $x = i$. Như vậy, vấn đề tính hội tụ của các chuỗi mà ta đã tránh được trong buổi đầu của giải tích đã trở thành một trong những nhân tố chủ yếu tạo nên lý thuyết hàm biến phức.

3. Chuỗi điều hòa và hàm dêta. Công thức Ơle biểu thị sinx dưới dạng tích vô hạn. Các chuỗi mà số hạng của chúng là các tổ hợp đơn giản của các số nguyên đã được chú ý đặc biệt. Ta xét «chuỗi điều hòa» làm ví dụ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad (16)$$

Nó chỉ khác với chuỗi có tổng bằng ln2 mà ta đã biết ở dấu của các số hạng ở vị trí chẵn.

Việc đặt ra vấn đề chuỗi này có hội tụ hay không cũng tương đương như tự hỏi rằng dãy số:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots,$$

trong đó $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, (17)

có dần tới giới hạn hay không.

Dễ thấy rằng chuỗi này không hội tụ. Thực vậy, nếu lấy một số khá lớn các số hạng thì ta đã có thể vượt quá một số dương bất kỳ nào đó, như vậy, s_n tăng vô cùng nghĩa là chuỗi (16) « phân kỳ tới vô hạn ». Muốn khẳng định điều này, ta chú ý rằng:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = s_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > s_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) > s_4 + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) =$$

$$= s_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2},$$

và tổng quát thì:

$$s_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}. \qquad (18)$$

Vậy thì các tổng riêng s_{2^m} sẽ lớn hơn 100 nếu $m \geqslant 200$.

Nếu chuỗi điều hòa phân kỳ thì có thể chứng minh được chuỗi:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \qquad (19)$$

hội tụ với mọi s lớn hơn 1 và tổng của nó được xem như một hàm biến x gọi là hàm dêta:

$$\zeta(s) = \lim\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) \text{ khi } n \to \infty \qquad (20)$$

Hàm này được xác định với $s > 1$.

Có một hệ thức quan trọng giữa các hàm dêta và các số nguyên tố mà ta sẽ suy ra từ tính chất của cấp số nhân. Giả sử p là một số nguyên bất kỳ; lúc đó, khi $s \geqslant 1$:

$$0 < \frac{1}{p^s} < 1,$$

tức là:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

Ta nhân các đẳng thức như thế được viết cho mọi số nguyên tố $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ với nhau (không để ý đến vấn đề về tính hợp pháp của phép toán này). Ở vế trái ta có «tích vô hạn»

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}}\right) \dots =$$

$$= \lim \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}}\right] \text{ khi } n \to \infty;$$

đồng thời ở vế phải ta có chuỗi:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \xi(s),$$

với lý do là mỗi số nguyên lớn hơn 1 được biểu thị một cách duy nhất dưới dạng tích các lũy thừa của những số nguyên tố khác nhau. Cho nên, ta đã biểu thị được hàm dêta dưới dạng tích:

$$\xi(s) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}}\right) \dots \quad (21)$$

Nếu như chỉ có một số hữu hạn số nguyên tố p_1, p_2, $p_3, \dots, p_r$ chẳng hạn, tích ở vế phải của công thức (21) sẽ là một tích hữu hạn thông thường và do đó nó có giá trị hữu hạn khi $s = 1$. Song ta đã thấy chuỗi dêta khi $s = 1$

$$\xi(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

phân kỳ, tiến dần tới vô hạn. Lập luận này dễ chuyển thành một chứng minh chặt chẽ, nó chứng tỏ rằng có tập hợp vô số số nguyên tố. Tất nhiên, chứng minh này phức tạp hơn rất nhiều và không tự nhiên bằng chứng minh của Ơclid (xem §1 chương 1). Nhưng nó hấp dẫn như là một cuộc trèo núi khó nhọc mà có thể đạt tới đỉnh núi theo một con đường thuận lợi.

Nhờ các tích vô hạn tương tự như công thức (21) việc biểu diễn các hàm cũng thuận tiện như khi dùng các chuỗi vô hạn.

Một tích vô hạn khác thuộc về hàm lượng giác sinx cũng là một trong những thành tựu của Ơle. Muốn hiểu công thức do Ơle tìm ra, ta hãy bắt đầu bằng một chú ý sau đây đối với các đa thức. Nếu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

là một đa thức bậc n có những nghiệm khác nhau $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ thì hàm f(x) có thể phân tích được thành các thừa số tuyến tính (xem §5 chương 2)

$$f(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Đưa tích $x_1 . x_2 \dots x_n$ ra ngoài ngoặc, ta có thể viết:

$$f(x) = C\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

trong đó C là hằng số bằng a_0, điều này dễ thấy nếu đặt $x = 0$. Sau đó, nảy ra vấn đề: có hay không có một khai triển tương tự không phải cho các đa thức mà cho các hàm f(x) phức tạp hơn? (Trong trường hợp tổng quát thì câu trả lời sẽ không phải là khẳng định, điều này có thể thấy được dễ dàng qua hàm mũ, hàm này hoàn toàn không có điểm không vì $e^x \neq 0$ với mọi x). Ơle đã phát hiện ra đối với hàm sin thì một khai triển như vậy là *có thể được*. Muốn viết công thức dưới dạng đơn giản nhất của nó, ta không xét sinx mà xét sin πx. Hàm này có các điểm không là $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, vì $\sin \pi n = 0$ với mọi n nguyên, ngoài ra nó không có điểm 0 nào khác. Công thức Ơle cho hệ thức:

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right) \ldots \quad (22)$$

Tích vô hạn ở vế phải hội tụ với mọi x và là một trong những công thức đẹp nhất của toán học. Khi $x = \frac{1}{2}$ công thức cho:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2.1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.3^2}\right)\ldots$$

Nếu ta viết:

$$1 - \frac{1}{2^2n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n},$$

thì sau những biến đổi nhỏ ta được tích Uôlix:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots,$$

đã nêu ở 4, §2, chương VI. Chúng tôi dành phải để bạn đọc tìm những chứng minh của tất cả các hệ thức này trong các sách giáo khoa giải tích.

§4. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỐNG KÊ.

Khi áp dụng các phương pháp toán học để nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên, người ta thường bằng lòng với những lập luận mà trong tiến trình của chúng thì dây chuyền các luận chứng logic chặt chẽ bị gián đoạn bởi những giả thiết có lý ở mức độ nào đó. Thậm chí còn có thể gặp ngay trong toán học thuần túy một lập luận tuy không phải là một chứng minh chặt chẽ nhưng ít ra nó cũng gợi ý cho một lời giải đúng và cho phương hướng tìm ra chứng minh chặt chẽ.

Đó chính là đặc điểm của lời giải bài toán về đường đẳng thời của Iacốp Becnuli (xem 3, §10, chương VI) và của rất nhiều bài toán khác trong thời kỳ đầu của phát triển giải tích.

Áp dụng quy trình điển hình của toán học ứng dụng và nói riêng của cơ học thống kê, ta nêu ra một lập luận ít ra cũng nêu lên được sự đúng đắn và có lý của định luật Gaux nổi tiếng về sự phân bố các số nguyên tố (Quy trình này đã được Guxtav Hecx một chuyên gia về vật lý thực nghiệm gợi ý ra). Định lý này đã được nghiên cứu với quan điểm thực nghiệm trong phần phụ lục của chương I, nó khẳng định số A(n) các số nguyên tố không vượt quá n, tiệm cận bằng $\frac{n}{\ln n}$:

$$A(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Biểu thức này được hiểu là tỉ số $A(n) : \frac{n}{\ln n}$ dần tới giới hạn khi n dần tới vô hạn.

Trước hết ta giả thiết *tồn tại* một qui luật toán học phân bố các số nguyên tố, có tính chất sau đây: với những giá trị lớn của n thì hàm A(n) được xác định ở trên xấp xỉ bằng tích phân $\int_2^n W(x)dx$ trong đó W(x) là một hàm đo mật độ của các số nguyên tố (Ta chọn số 2 làm cận dưới của tích phân, bởi vì khi $x < 2$ thì tất nhiên ta có $A(x) = 0$). Chính xác hơn, giả thử x là một đại lượng tăng và Δx là một đại lượng tăng khác nhưng bậc tăng của x lớn hơn bậc tăng của Δx (có thể cho rằng $\Delta x = \sqrt{x}$ chẳng hạn). Sau đó, ta giả thiết sự phân bố các nguyên tố là đều đến nỗi số nguyên tố trong khoảng từ x đến $x + \Delta x$ gần bằng biểu thức có dạng $W(x)\Delta x$, hơn nữa hàm W(x) biến thiên đều sao cho tích phân $\int_2^n W(x)dx$ có thể thay thế được bởi một tổng tích phân «bậc thang» tương ứng mà không thay đổi giá trị tiệm cận của nó. Sau những chú ý sơ bộ đó, ta đã sẵn sàng bắt đầu lập luận. Trước đây đã chứng minh rằng với những số nguyên lớn thì biểu thức $\ln(n!)$ tiệm cận tới tích $n\ln n$:

$$\ln(n!) \sim n\ln n$$

Bây giờ ta cho một công thức tiệm cận khác của $\ln(n!)$ được biểu thị bằng các số nguyên tố, rồi so sánh hai biểu thức. Ta hãy đếm xem có bao nhiêu thừa số nguyên tố p bất kỳ nhỏ hơn n ở trong số nguyên $n! = 1.2.3\ldots n$. Ta ký hiệu $[a]_p$ là số nguyên k lớn nhất sao cho a chia hết cho p^k. Do phân tích nguyên

tố của một số nguyên bất kỳ là duy nhất, ta suy ra hệ thức $[ab]_p = [a]_p + [b]_p$ với mọi số nguyên a và b. Từ đó:

$$[n!]_p = [1]_p + [2]_p + [3]_p + \dots + [n]_p.$$

Trong dãy 1, 2, 3,..., n các số hạng chia hết cho p^k có dạng p, $2p^k$, $3p^k$,...; số N_k của chúng với n lớn, xấp xỉ bằng $\frac{n}{p^k}$.

Trong những số hạng này thì số M_k những số hạng chia hết cho p^k nhưng không chia hết cho các lũy thừa bậc cao hơn của p sẽ bằng hiệu $N_k - N_{k+1}$. Do đó ta có:

$$\begin{aligned}[n!]_p &= M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots = \\ &= (N_1 - N_2) + 2(N_2 - N_3) + 3(N_3 - N_4) + \dots = \\ &= N_1 + N_2 + N_3 + \dots = \\ &= \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \dots = \frac{n}{p-1}.\end{aligned}$$

(Cần hiểu rằng các đẳng thức này chỉ là gần đúng). Suy ra với những n lớn thì số n! xấp xỉ bằng tích của tất cả các biểu thức dạng $\frac{n}{p^{p-1}}$ với điều kiện $p < n$.

Như vậy, ta có công thức:

$$\ln(n!) \sim \sum_{p<n} \frac{n}{p-1} \ln p.$$

So sánh biểu thức thu được với công thức tiệm cận trước đây của ln(n!), ta có:

$$\ln x \sim \sum_{p<x} \frac{\ln p}{p-1}. \quad (1)$$

(thế n bởi x). Bước sau cùng – và quyết định – là việc tìm biểu thức tiệm cận cho vế phải của hệ thức (1). Nếu x rất lớn, có thể chia khoảng từ 2 đến $x = n$ cho một số r lớn các khoảng thành phần đủ lớn bởi các điểm $2 = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1} = x$ với các số gia tương ứng $\Delta\xi_j = \xi_{j+1} - \xi_j$.

Trong mỗi khoảng thành phần có thể có những số nguyên tố và mỗi số nguyên tố của khoảng thành phần thứ j xấp xỉ bằng số ξ_j. Do giả thiết của ta về hàm $W(x)$, trong khoảng thành phần thứ j có xấp xỉ $W(\xi_j)\,\Delta\xi_j$ số nguyên tố; do đó, tổng ở vế phải của hệ thức (1) xấp xỉ bằng biểu thức

$$\sum_{j=1}^{r+1} W(\xi_j)\,\frac{\ln\xi_j}{\xi_j-1}\,\Delta\xi_j.$$

Thay thế tổng hữu hạn này bằng tích phân mà nó xấp xỉ, ta được công thức:

$$\ln x \sim \int_2^x W(\xi)\,\frac{\ln\xi}{\xi-1}\,d\xi \tag{2}$$

Bây giờ ta xác định hàm $W(x)$ chưa biết. Nếu ta thay dấu $\sim$ bởi dấu đẳng thức thông thường và vi phân hai vế theo x thì theo định lý cơ bản của giải tích ta có thể viết

$$\frac{1}{x} = W(x)\,\frac{\ln x}{x-1}, \quad W(x) = \frac{x-1}{x\ln x}. \tag{3}$$

Ngay từ đầu ta đã giả thiết rằng $A(x)$ tiệm cận bằng tích phân:

$$\int_2^x W(x)dx$$

Như vậy, A(x) xấp xỉ bằng tích phân:

$$\int_2^x \frac{x-1}{x\ln x}dx. \qquad (4)$$

Muốn tính tích phân này ta để ý rằng hàm $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ có đạo hàm như sau:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$$

Với những giá trị lớn của x, hai biểu thức

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \text{ và } \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x\ln x}$$

tiệm cận bằng nhau vì các số hạng thứ hai trong hai biểu thức nhỏ hơn các số hạng thứ nhất nhiều. Do đó, tích phân (4) sẽ tiệm cận bằng tích phân

$$\int_2^x f'(x)dx = f(x) - f(2) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2},$$

bởi vì hai hàm được chúng ta so sánh chỉ khác nhau rất ít trên toàn khoảng lấy tích phân. Với những giá trị lớn của x, có thể bỏ qua số hạng không đổi $\frac{2}{\ln 2}$.

Lúc này ta được kết quả cuối cùng sau đây:

$$A(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Đó chính là định lý về số nguyên tố.

Ta không thể kỳ vọng rằng lập luận trên được xem như một chứng minh toán học mà chỉ là một phép quy nạp. Song, nếu phân tích sâu hơn ta sẽ đi đến kết luận như sau. Chúng ta đã can đảm thực hiện việc biện hộ dễ dàng cho từng bước đặc biệt việc chứng minh sự đúng đắn của công thức tiệm cận giữa tổng và tích phân theo thứ tự ở vế phải của các hệ thức (1) và (2), và cuối cùng việc lý giải cho bước đi từ hệ thức (2) đến hệ thức (3). *Việc chứng minh sự tồn tại của một hàm « mật độ » trơn W(x) mà* ta đã tiên đề hóa ngay từ đầu thì lại phức tạp hơn rất nhiều. Nhưng nếu điều đó được thừa nhận thì *sự đánh giá* bản thân hàm W(x) là một việc tương đối đơn giản. Bởi vậy, cái khó nhất trong bài toán về sự phân bố các số nguyên tố là chứng minh sự tồn tại của « mật độ » W(x).

Kỹ thuật tích phân

Định lý, đã chứng minh ở 1 § 5 chương này đã quy bài toán tích phân một hàm f(x) từ a đến b về việc tìm một hàm G(x) là nguyên hàm của hàm f(x). Lúc này tích phân chỉ đơn giản là hiệu G(b) — G(a).

Đối với những nguyên hàm như vậy (xác định chính xác đến một số hạng không đổi) ta có tên gọi « tích phân xác định » và dùng một cách ký hiệu rất thuận tiện :

$$G(x) = \int f(x)dx$$

không có các cận của tích phân (Cách biểu diễn này có thể làm hoang mang cho người mới học một phần nào)

Bằng cách chuyển ngược lại, từ mỗi công thức vi phân dễ dàng thu được một công thức tích phân không xác định nào đấy. Bổ sung vào qui trình có phần nào thực nghiệm đó, ở đây ta nêu hai qui tắc quan trọng

về thực chất không có gì khác là sự chuyển ngược lại các quy tắc vi phân hàm hợp và tích của hai hàm. Dưới dạng tích phân, chúng được gọi là *tích phân bằng phương pháp thế* và *tích phân « từng phần »*

A – Qui tắc thứ nhất suy ra từ công thức tích phân hàm hợp:

$$H(u) = G(x),$$

trong đó các hàm:

$$x = \psi(u) \text{ và } u = \varphi(x),$$

được giả thiết là liên kết đơn trị hai chiều ở trong miền đang xét.

Trong trường hợp này ta có: $H'(u) = G'(x)\psi'(u)$.

Đặt: $G'(x) = f(x)$,

ta có thể viết: $G(x) = \int f(x)dx$

đồng thời: $G'(x).\psi'(u) = f(x)\ \psi'(u)$.

Hệ quả này của công thức ở trên đối với $H'(u)$ tương đương với:

$$H(u) = \int f[\psi(u)]\psi'(u)du.$$

Chú ý rằng $H(u) = G(x)$, ta có:

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(u)]\psi'(u)du \qquad (1)$$

Nếu viết bằng các ký hiệu của Lâybnitx thì công thức này có dạng rất thuận tiện

$$\int f(x)dx = \int f(x)\ \frac{dx}{du}du.$$

Ta sẽ không mắc sai lầm nếu thay ký hiệu dx bằng ký hiệu $\frac{dx}{du}du$ dẫu rằng dx và du là những số, còn $\frac{dx}{du}$

là tỉ số của chúng. Ta sẽ minh họa ích lợi của công thức (1) bằng một số thí dụ:

a) $J = \int \frac{1}{u \ln u} du.$

Đọc công thức (1) từ phải sang trái bằng cách đặt trong đó $x = \ln u = \psi(u)$. Khi đó ta có $\psi'(u) = \frac{1}{u}$,

$f(x) = \frac{1}{x}$ tức là:

$$J = \int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

hoặc:

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \ln \ln u .$$

Có thể thử lại kết quả bằng phép vi phân, ta có:

$$\frac{1}{u \ln u} = \frac{d}{du}(\ln \ln u)$$

b) $J = \int \text{ctg} u du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du$

Đặt $x = \sin u = \psi(u)$, ta có

$$\psi'(u) = \cos u, \qquad f(x) = x,$$

suy ra:

$$J = \int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

hay: $\int \text{cotg} u du = \ln \sin u.$

Kết quả này thử lại được bằng phép vi phân.

c) Giả thử tích phân cho trước có dạng phức tạp hơn:

$$J = \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} du ;$$

đặt $x = \psi(u)$, $f(x) = x$, ta có

$$J = \int \frac{dx}{x} = \ln x = \ln \psi(u)$$

d) $J = \int \sin x \cos x \, dx$. Đặt $\sin x = u$, $\cos x = \frac{du}{dx}$

$$J = \int u \cdot \frac{du}{dx} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

e) $J = \int \frac{\ln u}{u} du$. Đặt $\ln u = x$, $\frac{1}{u} = \frac{dx}{du}$. Như vậy thì

$$J = \int x \frac{dx}{du} du = \int x dx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} (\ln u)^2.$$

Trong các thí dụ sau đây ta dùng công thức (1) nhưng đọc nó từ trái sang phải:

f) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Đặt $\sqrt{x} = u$. Vậy thì $x = u^2$ và

$$\frac{dx}{du} = 2u$$

Bởi thế: $J = \int \frac{1}{u} \cdot 2u du = 2u = 2\sqrt{x}.$

g) Nhờ phép thế $x = au$, trong đó a là hằng số, ta được:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{du} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} du =$$

$$= \int \frac{1}{a} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

b) $J = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Đặt $x = \cos u$, $\frac{dx}{du} = -\sin u$.

Ta có : $J = -\int \sin^2 u\, du = -\int \frac{1 - \cos 2u}{2} du =$

$$= -\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}.$$

Chú ý rằng

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2\cos u \sqrt{1 - \cos^2 u}$$

ta đi đến công thức:

$$J = -\frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2}.$$

B. Qui tắc vi phân một tích

$$(p(x)\ q(x))' = p(x) \cdot q'(x) + p'(x) \cdot q(x)$$

được viết dưới dạng tích phân như sau :

$$p(x) \cdot q(x) = \int p(x)\, q'(x) dx + \int p'(x) \cdot q(x) dx,$$

hoặc

$$\int p(x) \cdot q'(x) dx = p(x) \cdot q(x) - \int p'(x)\, q(x) dx \qquad \text{(II)}$$

Dưới dạng này, nó được gọi là *qui tắc tích phân từng phần.* Qui tắc này có ích trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân có dạng $p(x)\, q'(x)$ trong đó tích phân không xác định $q(x)$ của hàm $q'(x)$ là đã biết. Công

thức (II) qui bài toán tích phân không xác định hàm $p(x)\,q'(x)$ về bài toán tích phân hàm $p'(x)\,q(x)$ đơn giản hơn :

a) $J = \int \ln x dx$. Đặt $p(x) = \ln x$, $q'(x) = 1$, tức là $q(x) = x$. Lúc này, công thức (II) cho ta :

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{x}{x} dx = x\ln x - x.$$

b) $J = \int x\ln x dx$. Đặt $p(x) = \ln x$, $q'(x) = x$. thế thì :

$$J = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

c) $J = \int x\sin x dx$. Đặt $p(x) = x$, $q(x) = -\cos x$ ta được:

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x.$$

Tích phân $\int \sin^m x dx$ theo từng phần, ta được một công thức đặc biệt cho số π dưới dạng một tích vô hạn. Viết hàm sinx dưới dạng $\sin^{m-1}x \cdot \sin x$ và tích phân từng phần trong khoảng từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$. Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\cos^2 x dx =$$

$$= -(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x dx,$$

hoặc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx$$

(vì số hạng thứ nhất ở vế phải của (II) pq triệt tiêu khi $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$). Áp dụng lặp lại công thức sau cùng này ta được những giá trị sau đây của tích phân.

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$$

(Công thức sẽ khác nhau phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của m):

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

Vì $0 < \sin x < 1$ khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$, nếu $\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x$, do đó: $I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$,

hoặc $$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1.$$

Thay vào những bất dẳng thức này các giá trị tích phân dã tính dược ta có:

$$\frac{2n+1}{2n} > \frac{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)(2n+1)}{2.2.4.4.6\ldots(2n)(2n)} \times \frac{\pi}{2} > 1$$

Cho $n \to \infty$, phần giữa của bất đẳng thức dần tới 1 ta được biểu diễn Uôlix cho số $\frac{\pi}{2}$ sau đây:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2n.2n\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1\ldots)} =$$

$$= \lim \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} \text{ khi } n \to \infty.$$

MỤC LỤC

R. COURANT . H.ROBBINS

TOÁN HỌC LÀ GÌ ?

TẬP 3

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Người dịch : HÀN LIÊN HẢI
Biên tập : ĐỖ ĐỨC ỨNG
Sửa bản in : ĐỖ ĐỨC ỨNG
Trình bày bìa : LẠI PHÚ ĐẠI

In 10.100 cuốn, tại Nhà máy in Tiến Bộ — Hà Nội
Khổ 13×19. Số in : 2052. Số XB : 16/85. In xong và nộp lưu chiểu tháng 4-1985.

Giá : ~~15đ,00~~

2[redacted]